

**Logische Untersuchungen
zu Modellen der klassischen und quanten-
theoretischen Mechanik**

Walter Robert Fuchs

1961

LOGISCHE UNTERSUCHUNGEN
ZU MODELLEN
DER KLASSISCHEN UND QUANTENTHEORETISCHEN MECHANIK

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München



vorgelegt von

Walter Robert Fuchs
aus Memmingen / Allgäu

München 1961

Referat: Prof.Dr. W.BRITZELMAYR

Korreferat: Prof.Dr.Dr. W.STEGMÜLLER

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Dezember 1961



DIESE UNTERSUCHUNGEN
SIND

HERRN PROF.DR. W.BRITZELMAYR
ALS ZEICHEN DER VEREHRUNG UND DANKBARKEIT
GEWIDMET

VORWORT

Die bedeutenden formallogischen Analysen der klassischen als auch der relativistischen Mechanik fanden im allgemeinen immer die Anerkennung der theoretischen Physik. Es sei nur an die relevanten Untersuchungen von REICHENBACH, SCHOLZ, HERMES und SUPPES erinnert.

Andersartig liegt die Situation für die Quantenmechanik: Die erkenntnistheoretische Diskussion wurde hier vor allem zu den Problemkreisen der Kausalität und der Interpretation unbeobachteter Objekte angeregt. Für die Logik und Grundlagenforschung ergab sich in diesem Zusammenhang die Frage nach der adäquaten logischen Form der Quantenmechanik. Um die Schwierigkeiten von "kausalen Anomalien" zu beseitigen, versuchte REICHENBACH bekanntlich, eine dreiwertige fiktive Logik an Stelle der klassischen zweiwertigen zu setzen. Diese Interpretation wird heute jedoch im allgemeinen als unbefriedigend angesehen.

Es scheint, daß letztlich doch die ontologischen Voraussetzungen der klassischen Logik (Logistik) von FREGE bis CARNAP es sind, die zu den vielzitierten Schwierigkeiten in den quantenlogischen Untersuchungen führen. Gerade für den Aufbau einer Quantenlogik ist aber der Unterschied von effektiver und fiktiver Logik von Bedeutung. Dabei ist die effektiv^e Logik - ganz im Sinne des Intuitionismus - als die grundlegende zu betrachten. Die Anwendung der fiktiven Logik ist jedoch in den meisten Fällen gerechtfertigt.

Die Anregung zur Thematik der vorliegenden Untersuchungen verdanke ich Prof.Dr. BRITZELMAYR. Auch für ihre Ausarbeitung wurde ich von ihm in jeder Hinsicht unterstützt. Ihm vor allem muß an dieser Stelle gedankt werden. Wertvolle Unterstützung waren mir die Vorlesungen, Übungen und Seminare von Prof.Dr.Dr. STEGMÜLLER. Gerade seine Darstellung der semantischen Gedanken LORENZENS für die effektive Logik war mir eine große Hilfe: LORENZENS "Metamathematik", in der diese Gedan-

ken formuliert sind, war bis zum Abschluß meiner Arbeit noch nicht erschienen. In diesem Zusammenhang möchte ich auch Prof. Dr. RICHTER vom Berchmanskolleg in Pullach herzlich danken: Er überließ mir seine Aufzeichnungen zum Seminar über "Sprache und Logik" (Alpbach 1960), wo LORENZEN über die operative Interpretation des logischen Schließens referierte.

München, im Oktober 1961

INHALTSVERZEICHNIS

0.	EINLEITENDE GEDANKEN ZUM GEGENSTAND UND ZUR METHODE DER UNTERSUCHUNGEN	
0.1	Prolegomena	Seite 1
0.2	Formalwissenschaft und Erfahrung	4
0.3	Logik der natürlichen Sprache, Logik der Konstruktion	8
1.	Kapitel: WISSENSCHAFTSTHEORETISCHE BETRACHTUNGEN ZU MODELLEN DER THEORETISCHEN MECHANIK	
1.1	Axiomatik und Analytizität in der Theorie der Klassischen Mechanik	14
1.2	Die analytischen Feldtheorien als Bruch mit der Tradition	21
1.3	Die Grundhypothesen der Klassischen Mechanik	26
1.4	Der HEISENBERG'sche Begriff "Abgeschlossene Theorie"	29
1.5	Quantenmechanik, Komplementarität, Unbestimmtheit	31
1.6	Zusammenfassung zum 1.Kapitel	35
2.	Kapitel: BESTIMMUNGSFRAGEN DER LOGIK: DIE ONTOLOGISCHE UND OPERATIVE AUFFASSUNG	
2.1	Die ontologische Grundlegung der klassischen Logik	37
2.2	Zur Charakterisierung der Axiomatisierbarkeit der klassischen Logik	41
2.3	Kalkülisierung im Rahmen der operativen Logik	44
2.4	Die operative Interpretation des logischen Schließens	50
2.5	Dialogsituationen in Sequenzenformulierung	54
2.6	Zusammenfassung zum 2.Kapitel	60

Die zwingende Genauigkeit, deren das mathematische Denken fähig ist, hat manche zu einem Stil verführt, der den Leser in eine grell erleuchtete Zelle einschließt, wo jede Kleinigkeit mit schwindelnder Helligkeit ohne Relief hervorsticht. Ich liebe die offene Landschaft unter einem heiteren Himmel mit tiefer Perspektive, wo der Reichtum naher, scharfer Details langsam zum Horizonte verschwindet.

Hermann · WEYL

0. EINLEITENDE GEDANKEN ZUM GEGENSTAND UND ZUR METHODE DER
UNTERSUCHUNGEN

Wir sprechen von der Logik, ohne die Verantwortung zu fühlen, mit der uns der bestimmte Artikel belastet, den wir in diesem Falle verwenden.

Heinrich SCHOLZ

0.1 PROLEGOMENA

- 0.11 "Der Weg von den allereinfachsten mathematischen Systemen, die in den Einzelerfahrungen und Meßresultaten enthalten sind, zu den großen physikalischen Theorien ist ein sehr langer, und wir sind weit davon entfernt, ihn vollständig überblicken zu können."¹⁾

Diesen Satz schrieb HEYTING im Jahre 1934 nieder. Eine verwirrende Vielfalt von Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, der Grundlagenforschung, der formalen Logik, der Methodologie und Erkenntnistheorie ist seither erschienen. Durch zahlreiche Spezialisten wurde der zitierte "Weg" Stück für Stück analysiert. Dabei zeigte sich, daß er nicht nur schwer zu begehen war, sondern auch gar nicht so klar und deutlich verlief, wie man immer angenommen hatte. Die kritischen Sonden der Formalwissenschaftler machten immer neue Wegstrecken aus, deren Fundament zu beanstanden war. Mancher im naiven Vertrauen gesetzte Pfeiler wurde ausgetauscht und durch "tragfähigere" Stützen abgesichert. Die Arbeiten an dieser bedeutenden "Baustelle" sind noch immer im vollen Gang, um den Weg von seinem Zustand der "Traumwandlerstrecke" zu erlösen. HEYTINGS "Warn-tafel" wurde noch nicht entfernt ...

- 0.12 Die vorliegende Arbeit bemüht sich, in diesem großen Rahmen einen kleinen Beitrag zur Klärung des Verhältnisses der Logik zur physikalischen Theorie zu liefern. Aus heuristischen Gründen beschränkt sich der Gegenstand unserer Untersuchungen auf das Gebiet der klassischen und quantentheoretischen Mechanik.

¹⁾ HEYTING(2), p. 67

Physikalische Aussagen über Vorgänge, die sich bei extrem hohen Geschwindigkeiten oder sehr hohen Energien abspielen, erscheinen also nicht. Dagegen werden in den Untersuchungen all jene Phänomene erfaßt, die mit der Meßprozeß-Theorie der Quantenmechanik beschrieben werden können.

Die in der effektiven Untersuchung angewandte Logik ist eine "natürliche", die sich am schematischen Operieren orientiert. Neben dem Wunsch nach streng konstruktivem Vorgehen leitete uns vor allem die Argumentation GENTZENs:

"Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere durch FREGE, RUSSELL und HILBERT entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird."²⁾

Die Logik, mit der wir arbeiten wollen, ist also *k e i n e* ontologisch bestimmte Logik. Dabei verwenden wir den Begriff einer "ontologisierenden" Logik oder Logistik im weitesten Sinne: Nicht nur die klassischen zweiwertigen Logiken von FREGE bis SCHOLZ, sondern auch für unsere Untersuchungen relevante mehrwertige Logiken (ŁUKASIEWICZ, REICHENBACH, DESTOUCHES-FEVRIER) sollen unter ihn fallen. Auch die Aussagen der mehrwertigen Systeme können ja in einem weiteren Sinne als "wahrheitsdefinit"³⁾ bezeichnet werden: Sie müssen gleichermaßen, wenn auch durch mehr als zwei "Wahrheitswerte", *s e m a n t i s c h* definiert werden. So verwendet ŁUKASIEWICZ etwa die Wahrheitswerte "C", " $1/2$ " und "1", REICHENBACH in seinen quantenlogischen Untersuchungen "wahr", "falsch" und "unbestimmt", und DESTOUCHES-FEVRIER unter anderem einen modallogischen Funktor "expérimentable", der die übliche Rolle des Notwendigkeitsfunktors vertritt. Derart bestimmte Aussagen kennzeichnen den Charakter von *f i k t i v e n* Logiken.

0.13 Im Rahmen dieser Untersuchungen wird die klassische zweiwertige Logik als fiktive Logik im Sinne LORENZENs⁴⁾ erschei-

²⁾ GENTZEN(1), p.176

³⁾ Vergl. weiter unten 2.111

⁴⁾ LORENZEN(5)

nen, die für einen mächtigen Bereich der Operation mit physikalischen Aussagen Gültigkeit besitzt. Einen Gedanken MITTELSTAEDTs aufgreifend, wollen wir eine effektive "Quantenlogik" auf konstruktivistischer Basis aufbauen, deren Begriffsbildung sich eng an der operativen Logik von LORENZEN orientieren wird.

Dabei wird es sich zeigen, daß die effektive und fiktive Quantenlogik sich in intuitiv durchsichtiger Weise als Teilkalkül eines allgemeinen Sequenzenkalküls formulieren läßt. Es ergibt sich eine analoge Situation wie bei dem Logiksystem das KLEENE in seiner "Introduction to metamathematics" formuliert: Dort erscheint das intuitionistische System als Teilkalkül des klassischen. In unseren Untersuchungen ist die Logik der quantenmechanischen Aussagen als Logik der inkommensurablen Eigenschaften - formal betrachtet - ein "Teilsystem" der umfassenden fiktiven Logik: Durch gewisse Restriktionen in den Regeln des Sequenzenkalküls entsteht eine fiktive Quantenlogik, durch weitere Einschränkungen die effektive Quantenlogik. Für alle formalen Modelle der klassischen Mechaniken gilt bei Abbildung ihrer kommensurabler Messaussagen auf die Figuren (Aussagen) des Kalküls die effektive Logik. Spezielle Eigenschaften der theoretischen Modelle, die in fast allen Fällen gewährleistet sind, garantieren auch die Anwendung des "tertium non datur" und damit der klassischen Logik. Selbst die Quantentheorie der kommensurablen Eigenschaften genügt dieser fiktiven Logik. Wie im KLEENESchen System erhält man natürlich auf analoge Weise die effektive (intuitionistische) Logik. Während KLEENE als auch HEYTING alle logischen Partikel als u n d e f i n i e r t e Grundbegriffe führen, ist in unseren Untersuchungen - dank den Arbeiten LORENZENs - ein klares semantisches Fundament auch für die grundlegenden effektiven "Teilsysteme" gegeben.

Dieser neue Weg zu einer effektiven Quantenlogik scheint uns notwendig, da die "ontologisierenden" Ansätze von REICHENBACH, DESTOUCHES und DESTOUCHES-FEVRIER zu zahlreichen, unübersehbaren Schwierigkeiten geführt haben. Vor allem scheinen die semantischen Interpretationen sehr willkürlich und unbefriedigend zu sein.

digend. Eine Quantenlogik, die an den natürlichen Sprachgebrauch anknüpfen will, gerät in hoffnungslose Schwierigkeiten. Sie wird außerdem mit noch nicht erwähnten erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten⁵⁾ verquickt, die in diesem Rahmen gar nicht behandelt werden können.

Auch v. WEIZSÄCKERS Idee einer Komplementaritätslogik als einer mehrwertigen Modallogik ist verschieden von unserem Ansatz, da sie bewußt ontologischen Charakter aufweist. Man liest etwa in "Komplementarität und Logik":

"Dabei ist es wahrscheinlich richtig, die entscheidende Änderung nicht in der Logik im engeren Sinne, sondern in der Ontologie zu suchen, aber so, daß der Zusammenhang dieser beiden Wissenschaften⁶⁾ in ein neues Licht rückt."

0.14 Wertvolle Anregungen und fruchtbare Ansätze für die vorliegende Arbeit verdanken wir den "Untersuchungen zur Quantenlogik" von MITTELSTAEDT⁷⁾. Von weiterer grundlegender Bedeutung für unsere Abhandlung ist die "klassische" Arbeit zum Gegenstand der Quantenlogik von BIRKHOFF & v.NEUMANN⁸⁾: Ihre verbandstheoretischen Ergebnisse in der grundlegenden Abhandlung "The logic of quantum mechanics" bestätigen sich dabei neu im Rahmen unserer Quantenlogik. Die Problematik zu sehen, wie sie sich von der Domäne der Theoretischen Physik aus abzeichnet, verdanken wir vor allem Arbeiten v.NEUMANNs, JORDANS und LUDWIGs⁹⁾.

0.2 FORMALWISSENSCHAFT UND ERFAHRUNG

0.21 Der holländische Mathematiker BROUWER hat in seinen Schriften einen Standpunkt vertreten, der seine Auffassung von der Naturwissenschaft wie folgt zusammenfassen läßt: Reine Mathematik ist eine freie Verstandesschöpfung, aktive Tätigkeit des Intellektes, die keine Beziehung zu den Erfahrungstatsachen hat. In dem einfachen Konstatieren einer Tatsache aus der Er-

⁵⁾ Vergl. hierzu vor allem STEGMÜLLER(4) und KALLA(1)

⁶⁾ Gemeint sind Logik und Physik

⁷⁾ MITTELSTAEDT(1)

⁸⁾ BIRKHOFF & v.NEUMANN(1)

⁹⁾ Vergl. die angeführten Arbeiten im Literaturverzeichnis

fahrungswelt ist jedoch immer die Bildung eines mathematischen Systems einbegriffen. Die Methode der Naturwissenschaft besteht nun darin, die in den Einzelerfahrungen enthaltenen **mathematischen Systeme** in einem rein mathematischen System zu vereinigen. Diese Auffassung steht im Gegensatz zur formalistischen Vorstellung von der Wirklichkeitswissenschaft als ein mit einer Deutung (Interpretation) versehener Kalkül.

- 0.22 Unter Physik versteht man heute allgemein - zunächst ziemlich intuitiv - das Konstruieren von mathematischen Theorien zur Deutung und Prognose natürlicher oder technisch bewirkter Vorgänge. Dabei zeigt sich jedoch eine scharfe Gliederung und Grenzziehung innerhalb des Gesamtgebietes Logik - Mathematik - Theoretische Physik als immer problematischer:

War die formale Logik früher eindeutig philosophische Disziplin, so geriet sie mit der Entdeckung der Logikkalküle in die Domäne des Mathematikers. Für CURRY, der die Mathematik als Theorie der Kalküle betrachtet, ist die Logik grundlegendes Teilgebiet der Mathematik. Und stand nicht auch die Theoretische Physik bis herauf ins 20. Jahrhundert in der Sphäre der Mathematik? Es war der Mathematiker POINCARÉ, der noch vor einem runden halben Jahrhundert eine "Mécanique céleste" schrieb. Wer wollte zudem bezweifeln, daß die Einreihung der Geometrie - vor allem seit der Existenz nichtEUKLIDischer Geometrien - zur reinen Frage des Standpunktes geworden ist ...

- 0.23 Die deduktive Geometrie, die EUKLID in seinen "Elementen" so wunderbar gesammelt, entwickelt und systematisiert hatte, nimmt wohl unbestritten einen der höchsten Plätze im Range der Höchstleistungen des Menschengenies ein. Was wunder, daß ein Faktum in der Geschichte der Naturwissenschaften die Anlehnung der physikalisch-theoretischen Systeme an diese EUKLIDische Geometrie ist. Die Analogien sind offenkundig. Tatsache ist, daß diese Systeme **a x i o m a t i s i e r b a r** sind¹⁰⁾. Über Jahrhunderte hinweg zeigte sich die Axiomatik

¹⁰⁾ Daß man die umfassende "Immanenz" der Axiomatik unfreiwillig ad absurdum führen kann, zeigt wohl am prägnantesten folgende Begebenheit: NAPIER, der Erfinder der Logarithmen, beschäftigte sich neben seinen mathematischen Arbeiten als strenger Puritaner vornehmlich mit theologischen Fragen: Dabei versuchte er in einer höchst spekulativen Auslegung der "Apokalypse" die axiomatische Methode anzuwenden. Propositionen und mathematische Beweise erschienen in diesem höchst kuriosen Traktat: So behauptete etwa Prop. 26, daß der Papst ein Antichrist sei, während Prop. 16 lehrte, die Heuschrecken der Schrift seien die Türken und Mohammedaner. Offensichtlich hat also auch die axiomatische Methode ihre Grenzen ...

in der Erfahrungswissenschaft als systematisierendes, aber vor allem auch ästhetisch-ontologisierendes Phänomen. Die "Harmonie der Welt" spiegelte sich in deduktiven Systemen mit evidenten Axiomen. Ehrfürchtig blätterte man im "Buch der Natur", das "in der Sprache der Mathematik" geschrieben war.

Aber auch für den Wissenschaftstheoretiker waren die Vorteile der realwissenschaftlichen Axiomatisierung offenkundig: Klare Übersicht über die entsprechende Disziplin, formale Klarheit und Erleichterung des Widerspruchsbeweises. Um dies zu garantieren, mußten jedoch seit HILBERTs "Grundlagen der Geometrie" die metatheoretischen Postulate der Systeme viel schärfer formuliert werden.

0.24 Die Formalwissenschaften Mathematik und Logik sind also eng mit den Naturwissenschaften, speziell der Physik, verbunden. Als communis opinio wird heute allenthalben akzeptiert, daß die Sätze der reinen Mathematik nichts aussagen über die Wirklichkeit. Es war vor allem POINCARÉ, der die Axiome der Geometrie und Theoretischen Physik klar als Konventionen charakterisierte, die z.B. das Verhalten der "starren Körper" möglichst einfach zu beschreiben gestatten. Erfahrung liefert keine formalwissenschaftliche Erkenntnisse durch Abstraktion: Verschiedenste mathematische Systeme beschreiben ein und denselben physikalischen Sachverhalt, wenn auch in unterschiedlichster Komplexheit.

0.25 HILBERT und die französischen Mathematik-Enzyklopädisten des BOURBAKI-Kreises haben die Anwendung der axiomatischen Methode von der Geometrie auf die anderen Gebiete der Mathematik übertragen: Die axiomatische Methode in der Mathematik hat sich seither so verselbständigt, daß man heute "abstrakte" und "konkrete" Mathematik konfrontiert. Die operative Mathematik LORENZENs teilt nun aber wieder der axiomatischen Methode ihre Funktion als Methode zu. Ihr Sinn ist durch die Anwendbarkeit auf "Modelle" der konkreten Mathematik gerechtfertigt.

0.251 Wie ist aber die Situation in der theoretischen Erfahrungswissenschaft? Arithmetisch-analytische Modelle für das EUKLIDISCHE Axiomensystem lieferte die analytische Geometrie DESCARTES'. LAGRANGES "Mécanique analytique" war die analytische Theorie zur NEWTONschen Mechanik. Für den Geometer, den Physiker ist also die Axiomatik von selbständigem Interesse: Seine Axiome haben Beziehung zu einer Wirklichkeit, die sich räumlich und materiell dem Menschen zeigt, wenn er sich beobachtend und messend mit ihr befaßt. Dieser **W i r k l i c h - k e i t s b e z u g** ist das einzige Kriterium, das ein Axiomensystem der Theoretischen Physik (einschließlich der Geometrie) vor allen anderen auszeichnet.

0.252 HILBERTs Behauptung von 1918 über die axiomatische Methode scheint also nur indirekt gerechtfertigt:

"Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik."¹¹⁾

Axiomatik als **M e t h o d e** ist unbedingt vorteilhaft, in der Mathematik wie in der Theoretischen Erfahrungswissenschaft. Aber für eine konstruktiv-logische Untersuchung ist die kalkülisierte Theorie unter Ausklammerung der Bedeutung vorkommender Relationen von grundlegenderer Bedeutung als die axiomatisierte Theorie. Axiomatik setzt Logik voraus, ein Kalkül nur die Fähigkeit, nach Regeln schematisch zu operieren. HEYTING erläutert zwei Vorteile der axiomatischen Methode in der physikalischen Theorie:

"Die axiomatische Methode ist vorteilhaft, erstens wenn das zu verwendende mathematische System noch nicht endgültig feststeht, wie es im Anfang der Entwicklung der Relativitätstheorie der Fall war, und erst angegeben werden soll, welchen Anforderungen das zu suchende System genügen soll. Zweitens wenn verschiedene mathematische Systeme gleichberechtigt nebeneinander stehen, wie heute

¹¹⁾ HILBERT(1)

in der Quantenmechanik, und die Untersuchung uns zeigen soll, welche Teile jedes Systems als wesentlich für die Theorie betrachtet werden müssen. Im ersten Fall ist das axiomatische Stadium vorübergehend, im zweiten ist die axiomatische Betrachtung nur eine Hilfsuntersuchung."¹²⁾

0.3 LOGIK DER NATÜRLICHEN SPRACHE, LOGIK DER KONSTRUKTION

0.31 Seit einigen Jahrzehnten hat die moderne Logik einen revolutionierenden Einbruch in die Mathematik gemacht. Schon das äußere Bild zeigt dies ganz offenkundig: Immer deutlicher spürt man den Einzug der logischen Symbolik in die Gefilde der mathematischen Formelsprache. In der Mengenlehre wird die Begegnung beider Disziplinen wohl am einsichtigsten.

Der alte "Bazillus" der Logik, die vielgestaltige *A n t i - n o m i e*, wurde durch diesen Prozeß in die formalisierte mathematische Sprache eingeschleppt. Mit zahlreichen künstlichen Ad-hoc-Therapien kämpfen seit Jahrzehnten Logizisten, CANTORisten und Formalisten gegen dieses Übel und für "das Paradies, das CANTOR geschaffen hat". Brilliant jongliert man seither bis in unsere Tage mit komplexen "Formalismen" und "Strukturen". Teilweise hat es tatsächlich den Eindruck, als müsse "die Vernunft Harikiri begehen": So kommentiert zumindest WEYL das vielumstrittene "axiom of reducibility" RUSSELLs einen Satz, der sich unbestritten jedem intuitiven Zugang hartnäckig verschließt.

0.32 Die Erfolge in der praktischen Mathematik, die Prognostizierungen der Theoretischen Physik durch ihre modernen Theorien sind somit erkaufte durch schwerwiegende Verluste der Einsichtigkeit. Evidenz ist nicht mehr gefragt:

"Die exakten Wissenschaften sind nicht mehr wie im 17. und 18. Jahrhundert die Bahnbrecher zu einem echten Verstehen der Welt. Ihre Fortschritte sind daher nicht

¹²⁾ HEYTING(2), p.67

mehr relevant für die geistige Existenz des Menschen, sie sind nur für die technische Existenz von Bedeutung."¹³⁾

Für die geistige Existenz genügt hier nach der Mentalität der Zeit blind-ehrfürchtiges Stauen, ahnungsvolles Raunen oder ohnmächtiges Resignieren ob der geistigen Leistungen der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik. Gewisse irrationale Philosophien kultivieren gebührend diese fragwürdigen Emotionen:

"PLANCK rann mit seiner Quantentheorie
zu KEPLER und KIRKEGAARD neu getrübt zusammen ..."

konstatierte BENN vor einem runden Jahrzehnt in seinem Gedicht "Fragmente". Man sollte sich aber wieder auf die Worte WEYLS besinnen, daß neben dem Bereich der Besinnung die "symbolische Konstruktion" der Welt als Befriedigung des menschlichen Dranges nach konstruktivem Handeln ihre Existenzberechtigung hat.

0.33 Es war bei BROUWER und seiner intuitionistischen Schule, wo erstmals konsequent versucht wurde, gegen den Bazillus der logisch-mathematischen Antinomien durch eine strenge Trennung der Logik der mathematischen Konstruktion von der Logik der natürlichen Sprache zu kämpfen. Die scharfe Trennung zwischen Mathematik und mathematischer Sprache gehört zu den wichtigsten Argumenten BROUWERS. Mathematik ist von der Sprache prinzipiell unabhängig: Schon für POINCARÉ war die reine Mathematik die aus der Intuition der natürlichen Zahlen aufgebaute Analysis. Das Denken einer Einheit und die gedankliche Bildung von Fundamentalreihen aus Einheiten braucht jedoch mit keiner sprachlichen Äußerung verbunden zu sein.

Auch die operative Logik LORENZENs knüpft in ihrer Fragestellung nicht an die Umgangssprache an, sondern an das schematische Operieren mit Figuren, an ein "natürliches Schließen" im GENTZENschen Sinn. So kommt die stark vernachlässigte Einsichtigkeit wieder zu ihrem Recht in der exakten Wissenschaft:

¹³⁾ LORENZEN, Paul: Luitzen Egbertus Jan BROUWER - Die Frage nach der Logik in der Mathematik; ersch. in: SCHWERTE & SPENGLER (eds.): Forscher und Wissenschaftler im heutigen Europa, Hamburg 1955, p.348

Die Reflexion über die Möglichkeiten des Operierens mit Figuren erfordert eine Evidenz der angewandten Operationsregeln. LORENZENs operative Logik und Mathematik "mischt in origineller Weise intuitionistische mit formalen Methoden", wie es HEYTING ausdrückt. Oder hören wir den Kommentar WEYLS:

"Heute will mir scheinen, daß die 'operative' Einstellung von Paul LORENZEN den gangbarsten Weg aus den Schwierigkeiten eröffnet. Die Operationen des formalen Kalküls sind hier in fruchtbarer und zwangloser Weise verflochten mit inhaltlichen Überlegungen über deren Produkte; die GÖDELsche Entdeckung verliert dadurch alles Beunruhigende."

0.34 Der konstruktive Ansatz in den Formalwissenschaften ist dabei im echten Sinne als KANTisch anzusehen: Er läßt sich philosophisch auf die Lehre von der "Spontaneität der Vernunft" zurückführen. Vier Jahre nach dem ersten Erscheinen der "Kritik der reinen Vernunft" schreibt KANT:

"Die Vernunft als reine Selbsttätigkeit ist über den Verstand erhoben: daß, obgleich dieser auch Selbsttätigkeit ist und nicht, wie der Sinn, bloß Vorstellungen enthält, die nur entspringen, wenn man die Dinge affiziert (mithin leidend) ist, er dennoch aus seiner Tätigkeit keine anderen Begriffe hervorbringen kann als die, so bloß dazu diene, um die sinnlichen Vorstellungen unter Regeln zu bringen und sie dadurch in einem Bewußtsein zu vereinigen, ohne welchen Gebrauch der Sinnlichkeit er gar nichts denken würde; dahingegen die Vernunft unter dem Namen der Ideen eine so reine Spontaneität zeigt, daß sie dadurch weit über alles, was ihm die Sinnlichkeit nur liefern kann, hinausgeht und ihr vornehmstes Geschäft darin beweist, Sinnenwelt und Verstandeswelt voneinander zu unterscheiden, dadurch aber dem Verstande selbst seine Schranken vorzuzeichnen."¹⁴⁾

Soweit KANT, den man durch WEYL ergänzen könnte:

¹⁴⁾ KANT, Immanuel: Grundlegung zur Metaphysik der Sitten (1785), Philos.Bibliothek d. Felix MEINER Verlages, p.78

"Wir h a b e n die Wahrheit nicht, sie will durch
H a n d e l n gewonnen sein."

Die radikale Kritik des Konstruktivismus (Intuitionismus) am
PLATONischen Realismus der klassischen Logik und Mathematik
kann sich auch bei den Konzeptionen zum Unendlichkeitsbegriff
auf KANT berufen: Die Annahme einer an-sich existierenden ak-
tualen Unendlichkeit ist eine PLATONische Fiktion, die ins
Reich der Fabel, aber nicht in eine exakte Wissenschaft gehört.
Bereits bei ARISTOTELES hatte die Unendlichkeit finitären
Charakter: Eine eigenständige Existenz des Unendlichen neben
dem Endlichen ist nicht zulässig. Das Unendliche ist gleich-
sam ein Spielraum von Möglichkeiten, die sich bei unbegrenz-
tem Fortschreiten im Endlichen unbegrenzt reproduzieren. Doch
lassen wir KANT wieder selbst sprechen:

"Der wahre Begriff der Unendlichkeit ist, daß die succes-
sive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantums
niemals vollendet sein kann."¹⁵⁾

Und den gleichen Gedanken vertritt POINCARÉ, wenn er schreibt:

"Es gibt kein Aktual-Unendlich; was wir unendlich nennen,
ist nur die Möglichkeit, unaufhörlich neue Objekte zu
schaffen, wie zahlreich auch die schon geschaffenen Ob-
jekte seien."¹⁶⁾

LIEBMANNs rhetorisches Fazit im Jahre 1865 war:

"Also muß auf KANT zurückgegangen werden."¹⁷⁾

In der Logik und Mathematik des 20. Jahrhunderts gewinnt es
unter völlig anderem Aspekt wieder neue Bedeutung.

0.35 Die konstruktivistische Behandlung der Formalwissenschaften
ist aber auch ein klarer m e t h o d i s c h e r Positivis-
mus. Die Frage nach dem Gegenstand von Logik und Mathematik
wird in dem Sinne beantwortet, daß ausschließlich das gilt,
was effektiv erreicht, also konstruiert werden kann.

¹⁵⁾ KANT, Immanuel: Kritik der reinen Vernunft, p.460

¹⁶⁾ POINCARÉ, Henri: Acta mathematica, vol.32(1909)

¹⁷⁾ LIEBMANN, Otto: KANT und die Epigonen, 1865 (Neudr.1912)

So weicht etwa im Intuitionismus das "Wahre" dem "effektiv Verifizierbaren", das "Falsche" dem "effektiv Falsifizierbaren", das "Existierende" dem "effektiv Konstruierbaren". Bedenkliche Schlußweisen und Operationen der klassischen Logik und Mathematik wurden verworfen: Indirekte Existenzweise, die das effektiv ungültige *tertium non datur* verwenden, reine Existenzaxiome wie etwa das Auswahlaxiom, imprädikative Begriffsbildungen¹⁸⁾, das Prinzip der doppelten Negation (*duplex negatio affirmat*). Mit diesen Prinzipien und Operationen kann im Bezug auf unendliche Gesamtheiten nicht mehr streng konstruktiv gearbeitet werden.

Erst LORENZEN schuf aber vor kurzer Zeit ein intuitiv durchsichtiges semantisches Analogon in der konstruktivistischen Logik für die "wahrheitsdefinite Aussage" der klassischen, fiktiven Logik: die *b e w e i s d e f i n i t e* (dialogisch definite) Aussage.

0.36 Die strengen Forderungen der konstruktivistischen Methode an Schlußweisen und Operationen haben keineswegs, wie oft zu Unrecht behauptet, verlustreiche Folgen für den überlieferten mathematischen Apparat: Sie haben nicht die Auswirkungen eines wild gehandhabten "OCCAMschen Rasiermessers", mit dem das stattliche Gebäude der klassischen Mathematik und Logik zu einem kläglichen Torso verstümmelt werden soll. Selbst im Intuitionismus sucht man seit Jahren schon nach Wegen, den Gebrauch der fiktiven Logiken zu rechtfertigen. Auch in unserer Abhandlung nimmt die fiktive Logik einen beachtlichen Platz ein. Ansonsten gilt wohl im Bereiche der vorliegenden Untersuchungen das gleiche, was LORENZEN über seine operative Mathematik aussagt:

"Die Beschränkung auf die operative Mathematik verwandelt das stolze Gebäude der modernen Mathematik aber

¹⁸⁾ Definitionen von logischen oder mathematischen Gegenständen durch Bezugnahme auf Gesamtheiten, denen diese Gegenstände bereits selbst angehören, nennt man imprädikativ.

keineswegs in eine Ruine, sie läßt es - von außen gesehen - bis auf unwichtige Einzelheiten unverändert. Im Inneren dagegen werden die axiomatischen oder naiv-mengentheoretischen Pfeiler durch zuverlässige Stützen zu ersetzen sein."¹⁹⁾

¹⁹⁾ LORENZEN(5), p.8

1. Kapitel :

WISSENSCHAFTSTHEORETISCHE BETRACHTUNGEN ZU MODELLEN DER THEORETISCHEN MECHANIK

Diejenige Naturanschauung, die bisher in der Physik die wichtigsten Dienste geleistet hat, ist unstreitig die mechanische.

Max PLANCK

1.1 AXIOMATIK UND ANALYZITÄT IN DER THEORIE DER KLASSISCHEN MECHANIK

1.11 Seit der berühmten "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" NEWTONs aus dem Jahre 1687 gab es die vielfachsten Axiomatisierungen der zweifellos majestätischsten Disziplin der Physik, der Mechanik. Man postulierte Axiome für die Mechanik der Massenpunkte und der Kontinua, für die nichtrelativistische und relativistische Mechanik.

1.12 Die quantitativ-mechanische Physik von GALILEI²⁰⁾ über NEWTON bis zu LAGRANGE erarbeitete die Klassische Mechanik als "abgeschlossene Theorie" im Sinne HEISENBERGs²¹⁾. NEWTON verband seine Grundbegriffe durch eine Gruppe von Axiomen, die sich direkt in der Sprache der Mathematik formulieren ließen. Seine Dynamik war eine großartige systematische Darstellung des bis zu seiner Zeit erforschten Materials. Der einzelne, komplexe Vorgang wurde als Folge der Grundgesetze verstanden und erläutert.

NEWTONs Mechanik war eine rein geometrische. Man könnte sie als erweiterte EUKLIDISCHE Geometrie auffassen. Den Ansprüchen die seit HILBERTs "Grundlagen der Geometrie" (1899) an mathematische Axiomensysteme gestellt werden, genügt die NEWTONsche Axiomatik natürlich nicht mehr.

²⁰⁾ GALILEI, Galileo: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenti alla meccanica e i movimenti locali, Pisa 1638

²¹⁾ HEISENBERG(3); der Begriff wird unter Kap.1.4 abgehandelt.

1.121 Die Intentionen der "Principia" waren jedoch gekennzeichnet durch das Bemühen, sämtliche Erkenntnisse ihres Forschungsbereiches auf eine Basis unmittelbar einsichtiger Aussagen zurückzuführen, aus denen sich alle anderen logisch erschließen lassen. Dieses Bemühen ist fast so alt wie die systematische geistige Betätigung des Menschen überhaupt. Die rationale Tradition der griechischen Philosophie ließ den Menschen teilnehmen am Wissen um fundamentale Sätze: Es gibt Axiome (αξιώματα, ἀρχαί, πρώτα), die dem evident sind, der an der Idee der Zahl, des Punktes usw. teil hat²²⁾. Die alten Griechen, das Mittelalter, ja die jüngste Zeit bis zu den epochemachenden Arbeiten HILBERTs verstanden unter den Axiomen eines Systems bestimmte einleuchtende Prinzipien, auf die alle Sätze einer Wissenschaft reduziert werden konnten. Abweichende Ansichten konnten somit, bei Anerkennung der gleichen logischen Schlußregeln, sich nur in verschiedenen Axiomen widerspiegeln²³⁾.

1.122 So wie NEWTONs Mechanik geartet war, konnte also aus den Anfangsbedingungen die ganze Zukunft des Systems prognostiziert werden. Die vollständige Vorausberechnung der Zukunft war prinzipiell möglich. LAPLACE hat bekanntlich diesen Gedanken wohl am klarsten und plastischsten ausgesprochen.

1.1221 Wenn aber daraufhin die französischen Enzyklopädisten des 18. Jahrhunderts dem Ziele nahe zu sein glaubten, den gesamten Komplex "Natur" physikalisch-mechanisch zu erklären, so war diese projektierte Weltauffassung zwar nur eine mechanische Mythologie abseits des Bereichs strenger, wissenschaftlicher Forschung. Diese Anschauung lieferte jedoch für die physikalische Forschung so positive Impulse, daß man es niemand verwehren sollte, sich der Auffassung MACHs anzuschließen:

"Diese freudige Überschätzung der Tragweite der gewonnenen physikalisch-mechanischen Einsichten im 18. Jahrhundert

²²⁾ Zur Axiomatik der griechisch-rationalen Philosophie: SCHOLZ, Heinrich: Die Axiomatik der Alten; Blätter für Deutsche Philosophie, vol. 4, Berlin 1930/31, pp. 259-278

²³⁾ Die Aristotelischen Postulate für eine deduktive Wissenschaft finden sich in klarer Übersicht bei BETH(2), pp. 31-32

ist verzeihlich, ja sie ist ein liebenswürdiges, edles, erhebendes Schauspiel, und wir können diese intellektuelle, einzig in der Geschichte dastehende Freude lebhaft mitempfinden."²⁴⁾

Überdies hatte schon in GALILEIs Tagen der katholische Theologe und Mathematiker GASSENDI die mechanistische Naturnotwendigkeit als Fügung Gottes gedeutet:

- 1.1222 Die Mechanik war somit für das 18. und ganz besonders für das 19. Jahrhundert geradezu die Inkarnation der exakten Naturwissenschaft schlechthin. Gerade aufgrund der metatheoretischen Untersuchungen in der Quantenmechanik unseres Jahrhunderts spricht man wieder mit gebührender Hochachtung von den geistigen Leistungen der Theoretiker der Klassischen Mechanik:

"Die Klassische Mechanik ist eine in sich geschlossene, wissenschaftliche Theorie. Sie ist überall eine streng 'richtige' Beschreibung der Natur, wo ihre Begriffe angewandt werden können. Wir billigen der NEWTONschen Mechanik also auch heute noch einen Wahrheitsgehalt, ja sogar strenge und allgemeine Gültigkeit zu, nur deuten wir durch den Zusatz 'wo ihre Begriffe angewendet werden können' an, daß wir den Anwendungsbereich der NEWTONschen Theorie für beschränkt halten."²⁵⁾

- 1.13 WITTGENSTEIN sieht in der NEWTONschen Mechanik eine "Weltbeschreibung in einheitlicher Form und erläutert in seinem "Tractatus":

²⁴⁾ MACH, Ernst: Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt; Leipzig 1933(9.Aufl.)

²⁵⁾ HEISENBERG(3), p.333. Zu dieser Limitation der Theorie, die aufgrund ihres Wirklichkeitsbezuges durch die Semantik auferlegt wird, tritt das Ergebnis der Untersuchungen GÖDELS, daß schon innerhalb der Syntax die deduktive Vollständigkeit eines Axiomensystems in keiner Weise garantiert sein muß (GÖDEL, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme; Monatshefte für Mathematik und Physik, vol.38(1931), pp.173-198). Der alte Traum von der sukzessiven Erweiterung axiomatischer Systeme war eine Fiktion: Ein widerspruchsfreies System S umfasse einen deduktiven Aufbau der wahrheitsfunktionellen und quantifikatorischen Operationen und sei zugleich eine hinreichende Basis für zahlentheoretische Ableitungen. Innerhalb des Systems S kann dann ein Satz $\mathcal{U}$ konstruiert werden, der dann und nur dann wahr ist, wenn er unbeweisbar in S ist. "Es erweist sich somit die Idee als fiktiv, durch allmähliche Erweiterung des Systems so reiche axiomatische Mittel zur Verfügung zu stellen, daß alle wahren Sätze darin beweisbar werden, ohne jedoch die Eigenschaft der Konsistenz zu zerstören."(STEGMÜLLER(3), p.208).

"Denken wir uns eine weiße Fläche, auf der unregelmäßige schwarze Flecken wären. Wir sagen nun: Was für ein Bild hierdurch immer entsteht, immer kann ich seiner Beschreibung beliebig nahe kommen, indem ich die Fläche mit einem entsprechend feinen quadratischen Netzwerk bedecke und nun von jedem Quadrat sage, daß es weiß oder schwarz ist. Ich werde auf diese Weise die Beschreibung der Fläche auf eine einheitliche Form gebracht haben. Diese Form ist beliebig, denn ich hätte mit dem gleichen Erfolg ein Netz aus dreieckigen oder sechseckigen Maschen verwenden können. Es kann sein, daß die Beschreibung mit Hilfe eines Dreiecks-Netzes einfacher geworden wäre; das heißt, daß wir die Fläche mit einem gröberen Dreiecksnetz genauer beschreiben könnten, als mit einem feineren quadratischen (oder umgekehrt) usw. Den verschiedenen Netzen entsprechen verschiedene Systeme der Weltbeschreibung."²⁶⁾ Die NEWTONsche Mechanik bestimmt in dieser Betrachtungsweise also eine gewisse Form der Weltbeschreibung: "Alle Sätze der Weltbeschreibung müssen aus einer Anzahl gegebener Sätze - den mechanischen Axiomen - auf eine gegebene Art und Weise enthalten werden."

1.131 Die WITTGENSTEINSche Bildtheorie²⁷⁾ sieht die Mechanik der "Principia" als Versuch, alle wahren Sätze, die zur weltbeschreibung benötigt werden, "nach einem Plan zu konstruieren". Das fiktive Netz, von dem der Verfasser des "Tractatus logico-philosophicus" spricht, betrachtet er als "rein geometrisch". Alle Eigenschaften dieses Netzes können a p r i o r i angegeben werden: "Gesetze, wie der Satz vom Grund, etc., handeln vom Netz; nicht von dem, was das Netz beschreibt."²⁸⁾

1.132 Man glaubt in den bedächtig tüftelnden Gedankenentwicklungen zur Mechanik bereits den späteren WITTGENSTEIN der "Philo-

²⁶⁾ WITTGENSTEIN(1), Satz 6.341

²⁷⁾ Diese Theorie ähnelt der "isomorphen Abbildung" in der Mathematik. Im Satz 2.18 des "Tractatus" liest man etwa: "Was jedes Bild, welcher Form auch immer, mit der Wirklichkeit gemein haben muß, um sie überhaupt - richtig oder falsch - abbilden zu können, ist die logische Form, das ist, die Form der Wirklichkeit." Eine ausführliche und präzise Interpretation der WITTGENSTEINSchen Bildtheorie findet sich bei STENIUS, Erik: WITTGENSTEIN's Tractatus, a critical exposition of its main lines of thought; Oxford 1960

²⁸⁾ WITTGENSTEIN(1), Satz 6.35

sophischen Untersuchungen" zu spüren. Sie wollen eigentlich nicht so recht in die geschlossene Abhandlung des "Tractatus" passen. Das ist schon deutlich seine Lust an geduldiger, detaillierter Kleinarbeit. Gedanklich und stilistisch wird man an POINCARÉ erinnert. Für den konstruktivistisch gesinnten Denker ergibt sich nun aber die Frage nach der "fiktiven Existenz" des Netzes der WITTGENSTEINSchen Erläuterungen. Der "ontologisierende" Formalwissenschaftler wird es natürlich aus seinem "platonischen Himmel der Ideen" zitieren, wo es als ideelle Wesenheit sein Sosein fristet. Dagegen wird der konstruktivistisch (intuitionistisch) Denkende sich überlegen, daß man dieses Netz ja herstellen kann. Und schon sind wir durch den reizvoll plastischen Vergleich im "Tractatus" beim Kalkülbegriff: Unter einem Kalkül versteht man ein System von Regeln, das ein Operieren mit beliebigen Figuren gestattet. Aus Figuren werden neue Figuren hergestellt. Auf unseren Fall angewandt: Durch schematisches Herstellen und Verknüpfen von Maschen (=Kalkülanfänge) entsteht das Netz. Zunächst mutet dies als Wortklauberei an: Im 2. Kapitel unserer Untersuchungen werden sich diese Unterscheidungen in der Auffassung als wesentliche Bestimmungsfragen für die Logik und Mathematik ergeben.

- 1.14 POINCARÉ, in seinen geistvollen Abhandlungen²⁹⁾ von ähnlich beharrlicher Gedankenentwicklung wie der spätere WITTGENSTEIN der "Philosophischen Untersuchungen", zieht sein Fazit zur Klassischen Mechanik wie folgt:

"La loi de l'accélération, la règle de la composition des forces ne sont-elles donc que des conventions arbitraires? Conventions, oui; arbitraires, non; elles le seraient si on perdait de vue les expériences qui ont conduit les fondateurs de la science à les adopter, et qui, si imparfaites qu'elles soient, suffisent pour les justifier."³⁰⁾

²⁹⁾ POINCARÉ, Henri: La valeur de la science, Paris 1905 - La science et l'hypothèse, Paris 1906 - Science et méthode, Paris 1912 - Dernières pensées, Paris 1913

³⁰⁾ POINCARÉ, Henri: La science et l'hypothèse, Paris 1906, p.133

- 1.15 Mit der EULERSchen "Mechanica, sive motus scientia analytice exposita" vom 1736 begann praktisch schon die analytische Methode in der Mechanik. Allerdings erinnerte EULERS Verfahren der Kräftezerlegung doch noch stark an die geometrische Methode NEWTONs: Bei krummlinigen Bewegungen zerlegte er alle auftretenden Kräfte in Tangential- und Normalkräfte. MACLAURIN ("A complete system of fluxions") zerlegte dagegen bereits 1742 nach drei unveränderlichen Richtungen: Die Übersichtlichkeit und Symmetrie seiner Rechnungsgänge war deshalb im Formelapparat schon viel markanter ausgeprägt. Schließlich war dann LAGRANGES "Mécanique analytique" vom Jahre 1787 (1813²) der Höhepunkt einer solchen "rechnenden" Mechanik.
- 1.151 Die Auffassung der Mechanik als einer synthetischen Theorie, die auf evidenten, durch keine Erfahrung widerlegbarer Axiomen aufbaut, wurde bei dieser Methode verlassen: Die theoretische Physik seit der "Mécanique analytique" setzte nicht mehr Axiome und deduzierte ihre Sätze nach logischen Regeln: Die Analysis als Theorie der reellen Zahlen einschließlich ihrer Funktionen wurde als mathematisches Hilfsmittel vorausgesetzt. Und hier operierte man nach den Regeln dieser Analysis selbst.
- LAGRANGES umfassende Generalisierungen auf dem Gebiete der Variationsrechnung und vor allem seine Systematisierung der Lehre von den Differentialgleichungen provozierten geradezu die Anwendung des mathematischen Apparates auf physikalische Probleme. Die LAGRANGESchen Differentialgleichungen brachten die Theorie der Mechanik auf allgemeine Formeln, die es bereits gestatteten, die speziellen Gleichungen abzuleiten, die zur Lösung der Einzelprobleme erforderlich waren.
- 1.152 Von LAGRANGES "Mécanique analytique" bis hin zu den HERTZschen "Prinzipien der Mechanik" (1894) tendierte die Physik des 19. Jahrhunderts zur Vereinbarung der klassischen Theorie der Mechanik mit den anderen physikalischen Erscheinungsgebieten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik, Thermodynamik). Die Verallgemeinerung einer solchen Deutung über die Gesamtheit aller Naturvorgänge war der faszinierende Versuch der "Mechanik" von HERTZ:

"Sie stellt ein Programm auf von erhabener Konsequenz und Harmonie, das alle früheren auf das gleiche Ziel gerichteten Versuche hinter sich läßt."³¹⁾

1.153 Sowohl bei LAGRANGE als auch bei HERTZ führte die Generalisierung zur systematischen Destruktion des klassischen Modellbegriffs. Die herkömmliche Deskriptivität äußerte sich bei GALILEI und NEWTON noch in der formalen Abbildung raumzeitlicher Strukturen, einer sogenannten "Realität". Nun aber wurde aus diesem Realmodell ein Deduktionsmodell: Dessen Aussagen bildeten zwar Realverhältnisse ab, die Struktur des Modells spiegelte als Ableitungsschema jedoch keineswegs anschauliche Verhältnisse dieser Realität ab. Anschauliche Substrate verschwanden; ein abstrakter axiomatisch-deduktiver Aufbau der physikalischen Theorie wurde angestrebt³²⁾. Es waren also nicht erst die markanten Akzente der Gegenwartsphysik, die Relativitäts- und Quantentheorie, die es deutlich zeigten, daß die Struktur der Theorie nicht ohne weiteres aufgefaßt werden kann als adäquate formale Repräsentation der "Weltstruktur" gewissermaßen als "unmittelbarer Ausdruck der Weltwirklichkeit".

31) PLANCK, Max: Die Stellung der neueren Physik zur mechanischen Naturanschauung, Leipzig 1910

32) Schon bei LEIBNIZ zeichnet sich ja in einer großartigen Vision ein wissenschaftstheoretischer Ansatz ab, der über diese Vorstellungen noch hinausweist: In den Kriterien für seine *Characteristica universalis* als System von Zeichen fordert er ein System von Operationsregeln: Überall dort, wo ein "Gedachtes" G_1 zu einem "Gedachten" G_2 in einer Grund-Folge-Beziehung steht, kann das "Bild" von G_1 stets als Folge des "Bildes" von G_2 interpretiert werden. Unwillkürlich denkt man bei dieser Forderung sofort an das berühmte HERTZsche Prinzip aus dem Vorwort zu seiner "Mechanik": "Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknötwendigen Folgen der Bilder stets wieder Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände." SCHOLZ erläutert hierzu in seinem prägnanten "Abriß der Geschichte der Logik" (Freiburg u. München 1959, 2. unv. Aufl.): "Nimmt man hinzu, daß die für das Operieren mit den herstellbaren Zeichenkombinationen geforderten Operationsregeln ihren Bestimmungen gemäß als Regeln für das Operieren mit diesen Zeichen und nur mit ihnen, funktionieren müssen, so sieht man, in welchem Sinn und welchem Recht schon LEIBNIZ selbst die Regeln als "Spielregeln" und den Effekt der ihm vorschwebenden Logik als Auflösung der logischen Operationen in ein "Zeichenspiel" ("jeu de caractères") hat interpretieren können." Im 2. Kapitel unserer Untersuchungen werden wir zeigen, wie LORENZEN diese Gedanken auf das Grundlagenproblem der Formalwissenschaften anwendet: Da sich axiomatische Logiksysteme als Kalküle auffassen lassen, löst sich der Zirkel, der in jeder axiomatischen Theorie der Logik steckt. Axiomatische Theorien setzen Logik voraus, Kalküle jedoch nicht.

Das physikalische Denken verließ schon damals die Ebene des Alltagsdenkens eines gebildeten Durchschnittsmenschen: LAGRANGE erhob es auf eine abstrakte, analytische Ebene, die für ein solches nicht geschultes Denken einfach unerreichbar ist. In der NEWTONschen Mechanik, in der EUKLIDischen Geometrie gab es nichts, das dem mit dem Bildungsgut seiner Zeit vertrauten Bürger nicht irgendwie intuitiv zugänglich war, was er nicht durch ungefähre Erklärungen hätte verstehen können. Die Lehrsätze erforderten nur die Vertrautheit mit der alltäglichen Welt der wahrnehmbaren physikalischen Erscheinungen.

- 1.1531 Schon LAGRANGE hatte das Neuartige seiner Methode erkannt, wenn er in der Einleitung zu seiner "Mécanique" schrieb:

"On a déjà plusieurs Traités des Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette science et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème... On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes qui j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche et me sauront gré d'en avoir tendu ainsi le domaine."

Dieses Fallenlassen der Figuren bei LAGRANGE zugunsten einer konsequenten algebraischen Analysis bezeichnet BENSE³³⁾ als den Gipfel der angewandten cartesischen Methode.

1.2 DIE ANALYTISCHEN FELDTHEORIEN ALS BRUCH MIT DER TRADITION

- 1.21 Die bestechend klare Theorie von MAXWELL war es, die erstmals eine mathematische Darstellung der elektromagnetischen Phänomene gab, ohne den Versuch zu machen, sie mechanisch zu erklären. Damit wurde mit einer stillschweigend akzeptierten

³³⁾ BENSE, Max: Der Begriff der Naturphilosophie, Stuttgart 1953

Maxime der Physik des 19. Jahrhunderts offen gebrochen: Mit der Reduktion aller physikalischen Erklärungen auf Aussagen der Mechanik. Es seien "wenigstens in der wahren Philosophie" alle Ursachen mechanischer Art, erklärte HUYGENS in der Vorrede seines "Traité de lumière". MAXWELL selbst hatte noch festgestellt:

"Wenn eine Naturerscheinung als eine Veränderung in der Konfiguration und in dem Bewegungszustande eines materiellen Systems beschrieben werden kann, muß man ihre Erklärung als vollendet ansehen."

Und gar noch bei BOLTZMANN kann man die Forderung nach mechanischer Erläuterung physikalischer Vorgänge als Voraussetzung für ihr wirkliches Verständnis finden.

- 1.22 Es gab für den MAXWELLSchen Ansatz, diesem klaren Bruch mit der physikalisch-theoretischen Tradition seit NEWTON, jedoch eine Rechtfertigung: Die analytische Methode als selbständiges Hilfsmittel der theoretischen Physik. Und so war die Theorie MAXWELLS die erste analytische Theorie überhaupt, zu der es nie eine synthetische Theorie wie zur analytischen Geometrie oder zur analytischen Mechanik gegeben hatte.

"Der englische Empirismus von LOCKE bis MILL gab für solche freischwebenden analytischen Theorien eine "philosophische" Rechtfertigung: alle Erkenntnis kommt aus der Erfahrung. Für die Physik bedeutet dies, daß am Anfang jeder physikalischen Theorie Messungen stehen. Diese liefern Zahlenreihen, die dann durch mathematische Funktionen möglichst gut darzustellen sind - und eine Theorie hat nur die Aufgabe, diese Funktionen möglichst einfach aus geeigneten 'Grundgleichungen' zu berechnen."³⁴⁾

- 1.23 Die "formale Struktur" der physikalischen Theorie erscheint seither unter einem neuartigen Gesichtspunkt: Das Primäre ist die experimentelle Induktion; erst in zweiter Linie interessiert

³⁴⁾ LORENZEN, Paul: Die Entstehung der exakten Wissenschaften; Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960

die axiomatische Deduktion³⁵⁾. Die ausgezeichneten Axiome der einzelnen Teilgebiete müssen nicht mehr "unmittelbar einsichtig" sein: Sie werden regressiv aus einem Konzentrat der induktiv gewonnenen Erkenntnisse gewonnen.

"Die Axiomatisierungsweise trägt bewußt einen 'nachträglichen' Charakter zur Schau; sie will eher bewahrend als produzierend sein."³⁶⁾

1.231 Man kann diese Gedanken noch konsequenter weiterführen, was einen wieder zu LEIBNIZ führt: In der modernen Physik fordern die aus zahlreichen Experimenten abgelesenen Beobachtungen fortwährend die Bildung der manigfachsten Arbeitshypothesen: Beim Ausbau der Erkenntnis gehen sie Hand in Hand mit der rein experimentellen Arbeit. Schon die leichtesten Modifizierungen und Abänderungen dieser Arbeitshypothesen können in der Ausarbeitung zu äußerst verschiedenen Folgerungen führen. Der Physiker muß, methodisch betrachtet, Beobachtungen und Hypothesen selektieren, die ihm als unerläßliche Grundlage erscheinen. Dazu muß er jedoch die in Frage kommenden Komplexe von Voraussetzungen miteinander vergleichen können. So fundieren die Systeme aus Beobachtungs- und hypothetischen Sätzen ein heuristisches, formales Modell. Klammert man dabei die Bedeutung der vorkommenden Relationen aus, kann eine logische Untersuchung im operativen Sinne schon einsetzen. Das, was schließlich durch weitergehende Generalisierungen als physikalische Theorie bezeichnet wird, kann kalkülisiert werden: Die Umschreibung einer Theorie in der Form eines Kalküls geht, wie schon angedeutet³⁷⁾, auf LEIBNIZ zurück.

1.232 Für die konstruktivistisch-logische Untersuchung einer physikalischen Theorie, ob sie nun analytisch oder synthetisch aufgebaut ist, ergibt sich daraus folgendes: Daß ein axiomatisch geordnetes System vorliegt, daß ein axiomatisierbares

³⁵⁾ Der Naturwissenschaftler, der seine Ergebnisse in einem axiomatischen System ordnend zusammenfügt, will also keinesfalls jenem Baumeister nacheifern, dem Gulliver im Reiche Laputa begegnete: "There was a most ingenious architect who had contrived a new method for building houses, by beginning at the roof, and working downward to the foundation ..." (SWIFT, Jonathan: Gullivers travels, chapt. voyage to Laputa).

³⁶⁾ SCHMIDT, Arnold: Die mathematische Struktur eines Wissensgebietes und ihre Festlegung; Studium Generale, vol. II/12 (1950), p. 682

³⁷⁾ Vergl. Fußnote 32

System ist für eine operative Untersuchung nur indirekt interessant. Wichtig ist, daß eine Kalkülierung vorgenommen werden kann. Während nämlich eine axiomatische Theorie bereits eine Logik voraussetzt, setzt ein Kalkül nur die menschliche Fähigkeit voraus, nach Regeln schematisch zu operieren.

- 1.24 Nach diesen allgemeinen Betrachtungen zur freischwebenden analytischen Theorie und ihrer Kalkülierbarkeit wollen wir uns wieder der historischen Situation der MAXWELL-Theorie zuwenden: Die zahlreichen unglücklichen Versuche, die MAXWELLSche Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch zu interpretieren, sind bekannt. Sie wollten die Gefilde der Physik mit einem metaphysisch-spekulativen Monstru, der "Äthersubstanz" besiedeln: Erst durch einen klaren positivistischen Schritt EINSTEINS in seiner Speziellen Relativitätstheorie ist diese fiktive "Substanz" ihres fragwürdigen Heimatrechtes in einer exakten Naturwissenschaft beraubt worden. Implizite Annahmen über die raum-zeitliche Struktur, die die MAXWELL-Gleichungen enthielten, machten die gewohnte Reduktion zu NEWTON schon prinzipiell völlig unmöglich: Nach NEWTON waren ja alle physikalischen Zustände oder Vorgänge solcher Art, daß sie sich ausschließlich im EUKLIDischen Raum abspielten³⁸⁾.

Weltanschauliche, ja politische Disputationen fanden jedoch jenseits der Physik noch für Jahrzehnte dankbare Nahrung aus diesem Scheindilemma. Und immer noch scheint dieses "Problem" gewisse Hirne zu fieberhaftem Denken zu provozieren ...

- 1.241 Andererseits war man aber nun innerhalb der Physik geneigt, die Mechanik, ehemals stolze Königin der physikalischen Wissenschaft, in Bausch und Bogen zu verdammten. Jedoch war die sich anbietende Alternative "Hie' NEWTON - hie' MAXWELL" eben keine vollständige Disjunktion für oder wider eine Wahrheit, die es gestattete, den Stab über den Verfasser der "Principia" zu brechen. NEWTONs faszinierendes Werk konnte nicht so einfach als "falsch" ad acta gelegt werden. Wir sahen bereits, daß die durch die Quantentheorie ausgelösten wissenschaftstheoretischen Untersuchungen diese einfache Aburteilung zunichte machten (vergl. 1.1222).

³⁸⁾ Vergl. weiter unten 1.301

Die formale Brillianz der neuen Theorie der elektromagnetischen Phänomene, dazu die Ausgestaltung einer umfassenden Feldtheorie in der Allgem. Relativitätstheorie EINSTEINS kündeten schließlich ein neues Programm physikalisch-theoretischer Forschung: Die Erscheinungsformen der Natur sollten nun in dem geschlossenen Begriffssystem einer Feldtheorie beschrieben werden. Man versuchte,

"selbst die atomistischen Züge der Natur mathematisch als Singularitäten in den Lösungen der Feldgleichungen zu deuten, und die de BROGLIE-SCHRÖDINGERSche Wellenmechanik schien zunächst in dieses Wunschbild einer allgemeinen Feldtheorie zu passen."³⁹⁾

Als geradezu universal empfand man dieses neue Begriffssystem, das objektiv und kausal die Vorgänge der Natur abzubilden mußte.

1.25 Die Begriffskritik der Relativitätstheorie wurde nun durch Empirie bestätigt: Begriffe wie "Maßstäbe", "Uhren", "gleichzeitige Ereignisse" hatten bei ihrer Bildung stets die stillschweigende Annahme enthalten, daß Signale von unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit prinzipiell möglich wären. Diese Hypothese erwies sich jedoch als falsch; die Empirie lieferte die effektive Falsifizierung. Die Allgem. Relativitätstheorie brachte schließlich eine ziemlich radikale Abkehr von der Begriffswelt der vorwissenschaftlichen Sprache und der klassischen Physik: Kritiklos wurde einzig und allein der Begriff "raum-zeitliche Koinzidenz" hingenommen⁴⁰⁾. Nur zur Beschreibung experimenteller Fakten, in denen Gravitationskonstante und reziproke Lichtgeschwindigkeit als sehr klein betrachtet werden können, eignet sich die Sprache der klassischen Physik. In der naturwissenschaftlichen Tradition verankert war jedoch die abstrakte Theorie EINSTEINS, wenn sie streng kausale For-

³⁹⁾ HEISENBERG(3), p.333

⁴⁰⁾ Zur Begriffsbildung der Relativitätstheorie: REICHENBACH, Hans: Die relativistische Zeitlehre; Scienza 1924 - Lichtgeschwindigkeit und Gleichzeitigkeit; Annalen der Philosophie 1927 (Aufsätze) und vor allem die beiden Werke des gleichen Verfassers: Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre; Braunschweig 1924 - Philosophie der Raum-Zeit-Lehre; Berlin u. Leipzig 1928

mulierungen erlaubte⁴¹⁾ und eine strenge Trennung der Welt in Subjekt und Objekt, die eine störungsfreie Beobachtung physikalischer Zustände und Zustandsänderungen zuließ. Erst in der Quantentheorie wurde, wie noch gezeigt wird, der überkommene Begriff der "Beobachtung" fragwürdig.

1.3 DIE GRUNDHYPOTHESEN DER KLASSISCHEN MECHANIK

1.3001 Es werden hier im wesentlichen die von SCHOLZ⁴²⁾ aus der KANTischen Philosophie rational rekonstruierten Voraussetzungen der klassischen Physik angeführt. KANT selbst spricht zwar nirgendwo explizit von den Gesetzen der klassischen Physik, sondern immer nur von "allgemeinen Naturgesetzen"; meint aber effektiv die Gesetze der NEWTONschen Mechanik⁴³⁾.

1.301 EUDKLIDisches Prinzip: Alle physikalischen Zustände oder Vorgänge sind Zustände oder Vorgänge im EUKLIDischen Raum.

1.302 Prinzip der klassischen Zeitvergleichung: Alle physikalischen Zustände oder Vorgänge sind Zustände oder Vorgänge in einer Zeit, für die es eine absolute Gleichzeitigkeit und ein ebenso absolutes, kausalbedingtes "Früher" und "Später" gibt⁴⁴⁾.

1.303 Prinzip der Substantialität physikalischer Objekte: Physikalische Objekte gelten als substantiell im folgenden Sinn:

1.3031 Sie genügen dem Postulat der Genidentität⁴⁵⁾, d.h. für jeden Zeitpunkt ihrer Existenz können sie mit sich selbst identifiziert werden.

1.3032 Sie genügen dem Postulat der Massenerhaltung: Jedem physikalischen Objekt kann eine Masse zuge-

⁴¹⁾ Vergl. weiter unten 1.307

⁴²⁾ SCHOLZ, Heinrich: Einführung in die KANTische Philosophie, Vorlesungsmanuskript, Münster 1944

⁴³⁾ KANT, Immanuel: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, 1786

⁴⁴⁾ Vergl. die prägnanten Studien von Heinrich SCHOLZ: Eine Topologie der Zeit im KANTischen Sinne; *Dialectica*, vol.9 (1955), pp.66-113 - Zur KANTischen Lehre von der Zeit; *Archiv für Philosophie*, vol.6(1956), pp.60-69

⁴⁵⁾ Dieser Begriff geht zurück auf eine Arbeit LEWINs (LEWIN, Kurt: Der Begriff der Genese in der Physik, Biologie und Entwicklungsgeschichte, Berlin 1922)

ordnet werden, und zwar so, daß der Betrag dieser Masse sich überhaupt nicht ändert oder aber so, daß das Äquivalent der Umgebung entweder zugeführt oder entzogen wird.

- 1.30321 Das Postulat der Massenerhaltung erscheint explizit innerhalb der Physik nur in der Hydrodynamik, und zwar als sog. EULERSche Kontinuitätsgleichung. Die Klassische Mechanik wendet diese Grundvoraussetzung implizit an.
- 1.304 Prinzip der Objektivierbarkeit physikalischer Zustände oder Zustandsänderungen: Alle physikalischen Zustände oder Zustandsänderungen sind Zustände oder Zustandsänderungen von physikalischen Objekten oder Objektsystemen (im Sinne von 1.3031).
- 1.305 Prinzip der störungsfreien Beobachtbarkeit physikalischer Zustände oder Zustandsänderungen: Es ist stets möglich, einen physikalischen Zustand oder einen physikalischen Vorgang so zu beobachten, daß er durch die Beobachtung nicht gestört wird.
- 1.306 Prinzip der Anwendbarkeit der höheren Analysis (Infinitesimalrechnung) auf die exakte Beschreibung physikalischer Vorgänge (Stetigkeitsprinzip):
 - 1.3061 Es ist möglich, Zustandsgrößen von der Art der Augenblicksgeschwindigkeit oder Augenblicksbeschleunigung durch Differentialquotienten so zu bestimmen, daß sie meßbar sind.
 - 1.3062 Ordnet man irgend zwei verschiedenen Zahlenwerten x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) einer skalaren physikalischen Zustandsgröße (Energie, Volumen, Temperatur etc.) die Menge der reellen Zahlen x zwischen x_1 und x_2 ($x_1 \leq x \leq x_2$) zu, so gibt es zu jedem x einen Zeitpunkt t derart, daß die betrachtete Zustandsgröße in t den Wert x annimmt.
- 1.307 Prinzip der kausalen Bestimmtheit physikalischer Zustände oder Zustandsänderungen: Alle physikalischen Zustände oder Zustandsänderungen lassen sich beschreiben durch K a u s a l g e s e t z e, d.h. durch Gesetze, aus deren Prämissen für jeden Fall, für den sie erfüllt sind, sich wohlbestimmte Voraus-

sagen über die Zustände oder Zustandsänderungen von individuellen physikalischen Objekten oder Objektsystemen ergeben.

- 1.308 Prinzip der mechanistischen Naturanschauung: Alle physikalischen Objekte lassen sich darstellen durch mechanische Modelle, also Konfigurationen von unveränderlichen Massenpunkten.
- 1.31 Die Gesamtheit der physikalischen Vorgänge läßt sich nach den Prinzipien der Klassischen Mechanik also vollständig auf Bewegungen von unveränderlichen, gleichartigen materiellen Punkten oder Punktsystemen zurückführen. Zwei Begriffe, denen in diesem Zusammenhang fundamentale Bedeutung zukommt, sind "Materie" und "Punkt".
- 1.3101 Der Begriff der "Materie" dient hier lediglich als kinematischer Grundbegriff. Er hat rein fiktiven Charakter als "Träger" der Bewegung. Schließlich muß man ja von der Bewegung von irgendetwas sprechen: Die Massenpunkt-Physik der Klassischen Mechanik ist eine Physik der mechanischen Modelle. Daß der Materie außerdem eine Masse zukommt, ist für diese Betrachtungsweise völlig unwesentlich. MACH hatte schon Masse "nur" als einen "bewegungsbestimmenden Umstand" definiert.
- 1.3102 Der Begriff "Punkt" wird hier verwendet, um anzuzeigen, daß die Zuordnung des fiktiven Trägers zu einem Zeitpunkt t_n zu einem ganz bestimmten Raumpunkt erfolgt. HERMES⁴⁶⁾ spricht begrifflich präzisiert von einem "momentanen (materiellen) Punkt". Dieser momentan materielle Punkt wäre demnach ein zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachteter materieller Punkt, also ein zeitlicher Schnitt durch die Weltlinie eines materiellen Punktes. Daß einem solchen Punkt ein - wenn auch extrem kleines - Volumen zugeordnet werden kann, ist wiederum völlig ohne Belang.
- 1.311 Zweckmäßig verzichtet man jedoch auf die explizite Verwendung des Punktbegriffes zugunsten einer Betrachtung, die einen materiellen Punkt als die größte Klasse "zusammengehö-

⁴⁶⁾ HERMES(1), p.11

riger" materieller Punkte ansieht⁴⁷⁾. Nach LEWIN nennt man eine derartige Zusammengehörigkeit *Genidentität*⁴⁸⁾. Die Genidentitätsrelation $G(x,y)$ wird als Äquivalenzrelation eingeführt⁴⁹⁾; im System von HERMES wird sie als Grundbegriff geführt:

$$\underline{A\ 1.3-1} \quad A_x G(x,x)$$

$$\underline{A\ 1.3-2} \quad A_x A_y (G(x,y) \rightarrow G(y,x))$$

$$\underline{A\ 1.3-3} \quad A_x A_y A_z (G(x,y) \wedge G(y,z) \rightarrow G(x,z))$$

Durch die Eigenschaften der Reflexivität (A 1.3-1), der Symmetrie (A 1.3-2) und der Transitivität (A 1.3-3) ist G eindeutig als Äquivalenzrelation festgelegt.

- 1.312 Viele Scheinprobleme der üblichen, überlieferten Substanzbetrachtung werden in einem derartigen wissenschaftstheoretischen Begriffssystem vermieden. Hier gilt der Satz 5.5303 des WITTGENSTEINSchen "Tractatus":

"Von zwei Dingen zu sagen, sie seien identisch, ist ein Unsinn, und von *E i n e m* zu sagen, es sei identisch mit sich selbst, sagt gar nichts."

Ein Verlust an Anschaulichkeit ist bei diesem Begriff der Genidentität keinesfalls zu verzeichnen⁵⁰⁾. Und die Genidentitätsrelation gestattet eine klare formale Behandlung der in diesem Rahmen auftretenden Probleme.

1.4 DER HEISENBERGSCHER BEGRIFF "ABGESCHLOSSENE THEORIE"

- 1.41 Wir haben die Klassischen Mechaniken als "abgeschlossene

⁴⁷⁾ HERMES(2), p.284

⁴⁸⁾ Vergl. 1.3031

⁴⁹⁾ HERMES(2), p.285

⁵⁰⁾ Von Relevanz sind hier die erkenntnistheoretischen Untersuchungen QUINES in seiner Abhandlung "Identity, ostension and hypostasis" (Journal of Philosophy 1950), abgedruckt in QUINE(2). Der Einwand REININGERS, der Genidentitätsbegriff impliziere eine "Negation der Zeit" ist zweifellos nicht stichhaltig: "Der Begriff stellt nichts weiter dar, als eine für den Alltag wie für die Wissenschaft höchst willkommene denkökonomische Vereinfachung durch Identifizierung des in bestimmter praktischer und theoretischer Hinsicht Ununterscheidbaren. Es liegen also im gewissen Sinne spezielle Anwendungen des LEIBNIZschen principium identitatis indiscernibilium vor." (STEGMÜLLER, Wolfgang: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Stuttgart 1960 (2.Aufl.), p.313)

wissenschaftliche Theorien" im Sinne HEISENBERGS bezeichnet (1.12). Sie sind dort strenge und exakte Beschreibungen der Naturwirklichkeit, wo die in ihr enthaltenen Begriffe angewendet werden können. Vier große Disziplinen in der Gegenwartsphysik können in diesem Sinne als "abgeschlossene Theorien" gelten: NEWTONsche Mechanik, MAXWELLSche Theorie mit spezieller Relativitätstheorie, Wärmelehre mit statistischer Mechanik und unrelativistische Quantenmechanik mit Atomphysik. Im folgenden seien HEISENBERGS Kriterien kurz erläutert.

- 1.411 Das erste Kriterium ist für HEISENBERGS "abgeschlossene Theorie" ihre innere Widerspruchsfreiheit.

"Es muß möglich sein, die zunächst aus der Erfahrung stammenden Begriffe durch Definitionen und Axiome zu präzisieren, in ihren Relationen festzulegen, daß den Begriffen mathematische Symbole zugeordnet werden können, zwischen denen ein widerspruchsfreies System von Gleichungen entsteht."⁵¹⁾

Ein formales System ist bekanntlich widerspruchsvoll, wenn Theoreme von der Gestalt $\mathcal{A}$ und $\neg \mathcal{A}$ in ihm logisch ableitbar sind. Da man aus $\mathcal{A}$ und $\neg \mathcal{A}$ jeden beliebigen Satz ableiten kann, enthält ein widerspruchsvolles System sämtliche sinnvoll gebildeten Sätze der Sprache. In der klassischen Logistik - die HEISENBERG bei der Formulierung seiner Kriterien offenkundig vor Augen hatte - weist die Konstruktion eines formalen oder realen Modells die Widerspruchsfreiheit eines gegebenen Axiomensystems nach⁵²⁾

- 1.412 Gleichzeitig muß eine solche Theorie Erfahrungen "darstellen": Die Begriffe der Theorie müssen "unmittelbar in der Erfahrung verankert sein", sie müssen "etwas in der Welt der Erscheinungen 'bedeuten'." Die Axiomatisierung der Begriffe begrenzt aber in entscheidender Weise ihren Anwendungsbereich. Diese wiederum an die klassische Logistik anknüpfende Betrachtungsweise HEISENBERGS soll weiter unten im operativen Rahmen neu geklärt werden.

⁵¹⁾ HEISENBERG(3), p.334

⁵²⁾ Vergl. weiter unten 2.22

- 1.413 Die Grenzen des Anwendungsbereiches der Theorie sind notwendig nicht exakt zu bestimmen.

"Erst die Erfahrung, daß gewisse neue Gruppen von Erscheinungen nicht mehr mit den alten Begriffen geordnet werden können", zeigt diese Grenzen.

Bei der NEWTONschen Mechanik waren es die Untersuchungen FARADAYS, die erste Anzeichen für den begrenzten Anwendungsbereich deutlich machten: Der Begriff des "Kraftfeldes" wurde den elektromagnetischen Phänomenen besser gerecht als die mechanischen Begriffe.

- 1.414 Das Begriffssystem der geschlossenen Theorie ist ein unentbehrlicher Bestandteil der Sprache, in der die Physik über die Natur spricht⁵³⁾. Auch bei Überschreiten ihrer Grenzen gehört die Theorie zu den Voraussetzungen der weiteren Forschung:

"Wir können das Ergebnis eines Experimentes nur in den Begriffen früher geschlossener Theorien ausdrücken."

- 1.42 Eine im obigen Sinne geschlossene Theorie gilt demnach absolut und für alle Zeiten, wo immer Erfahrungen mit den Begriffen dieser Theorie beschrieben werden können. Sie enthält jedoch keine völlig sichere Aussage über die Welt der Erfahrungen: Wie weit die Begriffe dieser Theorie der Erscheinungen reichen, kann nur die Erfahrung zeigen.

- 1.421 Für unsere logischen Untersuchungen ist dazu folgendes zu sagen: Bei der Ausklammerung der Bedeutung der vorkommenden Relationen bleiben sie im Rahmen des Operativen. Aus der physikalischen Theorie, aus dem "inhaltlichen Modell" wird dann ein syntaktisches System, das in Anlehnung LEIBNIZ Kalkül genannt werden kann.

1.5 QUANTENMECHANIK, KOMPLEMENTARITÄT, UNBESTIMTHEIT

⁵³⁾ Im Sinne der "Philosophischen Untersuchungen" WITTGENSTEINS und in Hinsicht auf die effektive Pluralität künstlicher Sprachsysteme physikalischer Theorien spricht man hier wohl besser von der Sprache S der abgeschlossenen Theorie T oder von einem separaten "Sprachspiel".

1.51 Die Entdeckung des sog. Wirkungsquantum h durch PLANCK leitete eine physikalische Forschungsperiode ein, die vor allem in den Zwanzigerjahren unseres Jahrhunderts zu ungemein reichen Ergebnissen führte. Das Jahr 1925 war ein Meilenstein in dieser Entwicklung: Ein HEISENBERG'scher Ansatz wurde von BORN, JORDAN und ihm selbst, etwas später zudem von DIRAC zu einem neuen System der Quantentheorie ausgebaut: Das erste geschlossene System dieser Theorie war geschaffen. Die bald nachfolgende "Wellenmechanik" SCHRÖDINGERS zeigte sich als mathematisch gleichwertig. Und schließlich vereinigten DIRAC und JORDAN in der "Transformationstheorie" die verschiedenen Ansätze.

1.52 Intuitiv als auch formal führen zwei Wege zur Quantentheorie. Der eine über die Bewegungsgleichungen der Partikel, der andere über die klassisch interpretierten Wellenfelder von MAXWELL und de BROGLIE, die den Partikeln und Quanten zugeordnet sind. Die Endpunkte beider Wege lauten: Quantenmechanik bzw. Quantentheorie der Wellenfelder. Geht man von der Partikelvorstellung aus, so besteht nach dem BOHR'schen Korrespondenzprinzip⁵⁴⁾ eine intuitiv wie formal durchsichtige Analogie zwischen den Modellvorstellungen der klassischen und quantentheoretischen Mechanik.

1.53 Zum Aufbau der Quantenlogik benötigen wir - wie weiter unten gezeigt wird - ein Komplementaritätsprinzip als stark einschränkendes protologisches Prinzip. Diesen Gedanken übernehmen wir von MITTELSTAEDT⁵⁵⁾. Einige Erläuterungen zum physikalischen Prinzip der Unbestimmtheit sind also angebracht:

1.531 In der Physik der subatomaren Prozesse sind im allgemeinen mit jeder Beobachtung endliche, unkontrollierbare Störungen verbunden. Die HEISENBERG'sche Unbestimmtheitsrelation sagt nun aus, daß ein Interaktionsfaktor besteht zwischen dem Beobachter und seinem Objekt, der nicht ganz ausgeschaltet werden kann. Da aber jede raum-zeitliche Beschreibung eines physikalischen Vorganges eben bedingt ist durch die Beobachtung dieses Vorganges, folgt nun,

⁵⁴⁾ BOHR, Niels; ZS.f.Phys., vol.13(1923), p.117

⁵⁵⁾ MITTELSTAEDT(1), p.342

"daß die raumzeitliche Beschreibung von Vorgängen einerseits und das klassische Kausalgesetz andererseits komplementäre, einander ausschließende Züge des physikalischen Geschehens darstellen."⁵⁶⁾

Der Beobachtungsbegriff ist aber per definitionem an Raum und Zeit geknüpft: Auf atomare Erscheinungen kann er nur angewandt werden, wenn die in der Unschärferelation angegebene Begrenzung der raum-zeitlichen Bilder beachtet wird. Raum-Zeit-Beschreibung und Kausalität können also nicht gleichzeitig in additiver Weise angewandt werden. Das bekannte BOHRsche Schema schildert diese Situation:

Klassische Theorie:

Raum-Zeit-Beschreibung plus Kausalität

Quantentheorie:

entweder

oder

Raum-Zeit-Beschreibung

Mathematisches Schema nicht in

plus

Raum und Zeit

Unbestimmtheitsrelation

plus

Kausalität

←=====→

statistische
Zusammenhänge

⁵⁶⁾ HEISENBERG(1), p.48. Die Komplementaritätsbetrachtung übernahm BOHR von dem amerikanischen Philosophen William JAMES, der diesen Begriff verwendete, um die Aspektabhängigkeit des Weltbildes auszudrücken. Diesen Gedanken aufgreifend, erklärte BOHR das jeweilige Bild, das man von den subatomaren Prozessen in einem Experiment erhält, abhängig von der Art des Experimentes, also vom Standpunkt des Experimentators. In BOHRs Werk "Atomtheorie und Naturbeschreibung" (Berlin 1931) lesen wir zum Begriff der Komplementarität (p. 12): "Übrigens ist die Absicht mit einem solchen Kunstwort, im weitest möglichen Umfange eine Wiederholung des allgemeinen Argumentes zu vermeiden, sowie auch beständig an die Schwierigkeiten zu erinnern, die, wie schon erwähnt, davon herrühren, daß alle gewöhnlichen Worte der Sprache von unseren gewohnten Anschauungsformen geprägt sind, von deren Standpunkt aus die Existenz eines Wirkungsquantums eine Irrationalität ist. Infolge dieser Situation verlieren ja selbst Wörter wie *s e i n* und *w i s s e n* ihren eindeutigen Sinn. Ein interessantes Beispiel für die Zweideutigkeit des Sprachgebrauchs in der besprochenen Verbindung ist die Redensart, nach der das Versagen der Kausalitätsbeschreibung dadurch ausgedrückt wird, daß man von freier Wahl von seiten der Natur redet. Eigentlich fordert ja eine solche Redensart eine Vorstellung von einem außenstehenden Wähler, was doch schon durch den Gebrauch des Wortes 'Natur' verneint wird. Wir werden hier vor einen Grundzug in dem allgemeinen Erkenntnisproblem gestellt, und wir müssen uns klarmachen, daß wir dem Wesen der Sache nach letzten Endes immer darauf angewiesen sind, uns durch ein Gemälde von Worten, die in unanalysierter Weise gebraucht werden, auszudrücken."

- 1.532 In einer interessanten Abhandlung der Zeitschrift "Ratio" hat FEIBLEMAN⁵⁷⁾ darauf hingewiesen, daß die Unbestimmtheitsrelation als methodologische Einschränkung aufzufassen sei, die keinesfalls einen effektiven Naturzustand ausdrücke. Sie spreche nicht über das Sosein von Eigenschaften im subatomaren Bereich, sondern von der Feststellbarkeit solcher Eigenschaften. Das HEISENBERG'sche Prinzip ist also eine methodologische Limitation der Apparatur. In der Sprache des Konstruktivisten: Das Prinzip ist die Einschränkung einer Tätigkeit.

HEISENBERG selbst schreibt:

"Der Gegenstand der Forschung ist nicht mehr die Natur an sich, sondern die der menschlichen Feststellung ausgesetzte Natur, und insofern begegnet der Mensch auch hier wieder sich selbst."⁵⁸⁾

- 1.54 Es geben sich durch diesen methodologischen Aspekt physikalischen Forschens, der so deutlich ausgeprägt nur in der Quantenmechanik zum Ausdruck kommt, interessante Parallelen zur konstruktiven Methode in Logik und Mathematik. Sowohl Physiker wie Formalwissenschaftler operieren nach gewissen Regeln, von denen eine gewisse Einsichtigkeit gefordert wird. Sie vollbringen bestimmte, als sinnvoll akzeptierte Tätigkeiten. Der Experimentator vollzieht bestimmte Handlungen in seinen Beobachtungen, wobei er gegebenenfalls durch ein mehr oder weniger komplexes Arrangement von Meßinstrumenten unterstützt wird. Und sowohl der theoretische Physiker wie der Mathematiker und Logiker operiert nach schematischen, formalen Regeln. Die Frage, ob und wie weit sich Aussagen des Physikers über die Wirklichkeit als konstruierbare Figuren (Aussagen) eines Kalküls auffassen lassen, wird die Kernfrage der weiteren Ausführungen sein.

⁵⁷⁾ FEIBLEMAN, James: Die Unbestimmtheitsrelation in neuer Sicht; Ratio 1960/II, pp.119-134

⁵⁸⁾ HEISENBERG, Werner: Das Naturbild der heutigen Physik; Hamburg 1955, p.18

1.6 ZUSAMMENFASSUNG ZUM 1. KAPITEL:

NEWTONs Mechanik kann als eine erweiterte EUKLID-sche Geometrie aufgefaßt werden: Die quantitativ-mechanische Physik war eine synthetische Theorie, die auf evidenten, durch keine Erfahrung widerlegbaren Axiomen aufgebaut war. Die analytischen Mechaniken seit EULER, MACLAURIN und LAGRANGE deduzierten ihre Sätze dagegen nicht mehr nach logischen Regeln aus einsichtigen Axiomen. Man operierte nach den Regeln der höheren Analysis. Innerhalb dieser Mechaniken wurden die Realmodelle mit ihren anschaulichen Substraten ersetzt durch abstrakte Deduktionsmodelle. LAGRANGE erläuterte dies in seiner "Mécanique analytique": "Les méthodes qui j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme." MAXWELLS Theorie war die erste analytische Theorie überhaupt, zu der es nie eine synthetische Theorie wie zur analytischen Geometrie oder zur analytischen Mechanik gegeben hatte. Ein Gedanke LEIBNIZ', die Umschreibung einer Theorie in der Form eines Kalküls, bekommt seit dieser "freischwebenden" analytischen Theorie neue Bedeutung. Für eine logische Untersuchung ist dies wichtig, da eine axiomatische Theorie bereits eine Logik voraussetzt. Ein Kalkül erfordert dagegen nur die menschliche Fähigkeit, nach Regeln schematisch zu operieren. Eine explizite Ausführung der Grundvoraussetzungen der Klassischen Mechanik zeigt, daß diese die Gesamtheit der physikalischen Vorgänge vollständig auf die Bewegung von unveränderlichen, gleichartigen materiellen Punkten bzw. Punktsystemen zurückführt. Zentrale Bedeutung erhält hierbei der LEWINSche Begriff der "Genidentität".

Die Kriterien der "abgeschlossenen wissenschaftlichen Theorie" (HEISENBERG) zeigen eine deutliche Anlehnung an die Gedankengänge der klassischen Logistik zu Axiomatik und Semantik. Die Unbestimmtheitsrelation der Quantenmechanik versuchen wir als Limitation der Apparatur, als methodologische Einschränkung, zu kennzeichnen.

2. Kapitel:

BESTIMMUNGSFRAGEN DER LOGIK: DIE ONTOLOGISCHE UND DIE OPERATIVE AUFFASSUNG

Die ontologische und operative Auffassung der Logik widersprechen einander nicht: Es ist vielmehr nur so, daß sie sich in der Richtung des Fragens unterscheiden.

Paul LORENZEN

2.1 DIE ONTOLOGISCHE GRUNDLEGENG DER KLASSISCHEN LOGIK

- 2.11 Die klassische Logik (Logistik, Mathematische Logik), so wie sie vor allem von BOLZANO, FREGE, RUSSELL, TARSKI, CARNAP und SCHOLZ ausgearbeitet wurde, macht zwei gewichtige Annahmen, die nicht immer klar zum Ausdruck gebracht werden. Oftmals sind sie den Logikern gar nicht bewußt, sondern werden implizit vorausgesetzt:
- 2.111 Die klassische Logik fordert von allen sinnvollen Aussagen, daß sie entweder wahr oder falsch sind. Solche Aussagen heißen dann *w a h r h e i t s d e f i n i t*.
- 2.112 Durch Verwendung der unverzweigten Stufenlogik in der Metasprache setzt die klassische Logik einen naiven Mengenbegriff voraus.
- 2.12 Diese Voraussetzungen bedeuten jedoch, daß die Objekte der klassischen - wie LORENZEN sagt "fiktiven" - Logik, ja das ganze Feld dieser Logik, existieren wie platonische Ideen. Dieser An-sich-Charakter der logischen und mathematischen Gebilde bestimmt eine platonische Ontologie. Die fiktive Logik fußt somit auf derselben Ontologie wie die klassische Mathematik, die sogar unendliche Gesamtheiten von beliebig hoher Mächtigkeit als fertige, abgeschlossene Gegenstände betrachtet. Diese ontologischen Voraussetzungen einer derart konzipierten Logik sind natürlich so wesentlich und bestimmend, daß auf Handlungen im Sinne von Operationen grundsätzlich verzichtet werden kann:

Eine solche Logik beschreibt Gesetzmäßigkeiten, die gültig sind in jeder möglichen Welt. Ihre Aussagen, die meist axiomatisch geordnet sind, werden als **logische Leerform möglicher Wissenschaften** (WEYL) aufgefaßt. Sie ist daher völlig unabhängig von der Tatsache, daß es Wesen gibt, die gewisse vorgeschriebene Handlungen vollziehen können. Unendliche Bereiche werden in dieser klassischen Logik als fertig vorliegende Gebilde betrachtet, analog wie durch Aufzählung ihrer Elemente erfaßbare endliche Mengen. Und aus ihrem "platonischen Himmel" selektieren die klassischen Logiker und Mathematiker durch entsprechende Auswahlbedingungen ihre Objekte wie die Hausfrauen ihre Konserven aus dem Selbstbedienungsladen, um einen sehr plastischen Vergleich zu wählen.⁵⁹⁾

2.13 Der platonische Realismus bestimmt jedoch nicht nur die Logik der Objekte, sondern auch die Logik, unter deren Voraussetzung man über diese Logik spricht: Er bestimmt die **Metalogik**. Dies äußert sich vor allem in Sprachen, deren Begriffe auf die Bedeutung gewisser linguistischer Gebilde bezugnehmen: Semantische (bedeutungsdeterminierte) Begriffe wie "wahr" ("gültig", "richtig") und "falsch" ("ungültig") werden in der fiktiven Logik auf Aussagen angewandt.

2.131 Die Voraussetzung der Wahrheitsdefiniertheit aller Aussagen der fiktiven Logik (2.111) geht ein in die semantische Definition der Junktoren (logische Verknüpfungszeichen). Ebenso bestimmt sie den Folgebegriff in dieser Logik. Wohl am plastischsten erscheint diese Situation in den Wahrheitstabellen, den semantischen Tafeln. Mit ihrer Hilfe führt die klassische Logik ihre Junktoren als Gebrauchsdefinitionen⁶⁰⁾ ein. Diese Methode

⁵⁹⁾ LORENZEN meint hierzu: "Es ist sicherlich eine hübsche Vorstellung, wenn man die Ableitungen eines Kalküls zu einer Klasse zusammengefaßt denkt, wie Äpfel in einem Korb. In einem Korb sind aber nur endlich viele Äpfel, so daß man leicht feststellen kann, ob z.B. ein roter Apfel im Korb ist, oder nicht. Fragt man entsprechend, ob es eine Ableitung mit der Endaussage A gibt, dann kann man jedoch nicht alle Ableitungen auf diese Eigenschaft prüfen." Es war BROUWER, der 1908 erstmals auf die fundamentale mathematische Bedeutung dieses Unterschiedes zwischen endlichen und unendlichen Klassen hinwies.

⁶⁰⁾ In Gebrauchsdefinitionen ("contextual, definitions") erhält das Definiendum nur innerhalb von Sätzen, im Kontext, einen Sinn. Als selbständiger Name ist dieses Definiendum überhaupt nicht definiert. Als syntaktisches Gebilde ist es ein unvollständiges Sprachsymbol, das, vom Kontext abgelöst, für sich allein nichts bezeichnet.

wurde unabhängig um 1920 von WITTGENSTEIN, POST und LUKASIEWICZ ausgearbeitet: Der Wahrheitswert⁶¹⁾ von zusammengesetzten Aussagen wird berechnet aus Matrizen von Wahrheitswerten der primitiven Aussagen, die selbst keine Junktoren mehr enthalten. Man definiert dann:

D 2.1-1 Eine n-stellige Wahrheitsfunktion ist die eindeutige Zuordnung je eines Wahrheitswertes zu je einem n-tupel von Wahrheitswerten⁶²⁾.

2.132 Beispiel: Für die zweistellige Wahrheitsfunktion der "Adjunktion" ("nichtausschließende Disjunktion") gibt es etwa folgende Möglichkeiten einer semantischen Definition:

$$2.1321 \quad v(W,W) = v(W,F) = v(F,W) = W \\ v(F,F) = F$$

2.1322 $v(A,B)$ ⁶³⁾ erhält den Wert F dann und nur dann, wenn sowohl A als auch B den Wert F annehmen.

2.1323 Gemäß D 2.1-1 kann man formulieren: Die zweite cartesische Potenz der Menge $\{W,F\}$ wird in die Menge $\{W,F\}$ abgebildet, wobei kraft Festsetzung zugeordnet wird:

$$\{W,F\}^2 \xrightarrow{\text{"in"}} \{W,F\} \quad \begin{array}{l} (W,W) \mapsto W \\ (W,F) \mapsto W \\ (F,W) \mapsto W \\ (F,F) \mapsto F \end{array}$$

2.1324 Als einprägsamste und intuitiv durchsichtigste Darstellung hat sich die semantische Tafel (Wahrheitswerttabelle, Wahrheitstafel) durchgesetzt:

A	B	A v B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

2.14 Eine Aussageform $\mathcal{A}$, die Aussagevariable A,B,C,..., durch semantisch definierte Junktoren verknüpft, enthält, nennt die klassische Logik allgemeingültig, falls $\mathcal{A}$ bei allen Ersetzungen der Variablen durch Konstanten, den Wert "wahr" annimmt. Sym-

61) Im Anschluß an FREGE und RUSSELL spricht man von den sog. Wahrheitswerten "wahr" und "falsch", wobei jedoch ausschließlich der formale Aspekt entscheidend ist. Eine Wesensfrage "Was ist Wahrheit?" ist auch in der klassischen Logik völlig ohne Belang.

62) Der Begriff der "eindeutigen Zuordnung" kann nur im Rahmen einer axiomatischen Mengenlehre streng formuliert werden. Das gleiche gilt für den Begriff der "Abbildung".

63) In Anlehnung an den Sprachgebrauch ("A oder B") schreibt man gewöhnlich den Funktor "v" zwischen die Aussagevariablen A und B: "(A v B)" statt " $v(A,B)$ ".

bolisch drückt man das gewöhnlich aus: $\vdash \mathcal{U}$. Jede derartige Ersetzung, bei der $\mathcal{U}$ wahr wird, nennt man dann eine E r f ü l l u n g von $\mathcal{U}$. Die logische Implikation $\mathcal{U} \vdash \mathcal{L}$ bedeutet nun, daß jede Erfüllung von $\mathcal{U}$ auch eine Erfüllung von $\mathcal{L}$ ist.

- 2.15 In der niederen Prädikatenlogik, wo auch Zusammensetzungen mit Existenz- und Allquantoren erlaubt sind, läßt sich der Wahrheitswert nicht mehr in allen Fällen berechnen. Trotzdem nimmt jedoch der klassische Logiker an, der Wahrheitswert dieser Aussageformen sei "an sich" bestimmt.

V_x und A_x zwingen aber schon in der klassischen Logik zur Konstruktion: Logische Axiome werden aufgestellt, aus denen dann mit Hilfe von Regeln aus formal gültigen Aussagen neue formal gültige Aussagen erzeugt werden.

"Alle Urteilsstrukturen, welche durch wiederholte Anwendung einer Regel, ausgehend von den logischen Axiomen, gewonnen werden, haben analytischen Charakter, ohne daß es möglich wäre, unabhängig von der konstruktiven Erzeugung der einzelnen Strukturen ihre unendliche Manigfaltigkeit deskriptiv zu kennzeichnen.",

schreibt WEYL im Jahre 1928⁶⁴⁾ und schließt als intuitionistischer Denker:

"Daher die Notwendigkeit des Beweises Schritt für Schritt. So kann man mit einem von J. FRIES in etwas anderem Sinne geprägten Wort sprechen von einer "ursprünglichen Dunkelheit der Vernunft". Wir h a b e n die Wahrheit nicht, sondern sie will durch H a n d e l n gewonnen sein."⁶⁵⁾

Soweit Hermann WEYL, dessen Konzeptionen in der operativen Auffassung der Logik weiterentwickelt wurden (2.3 ff). Die klassische Logik macht dagegen, wie bereits erwähnt, die fiktive Annahme der An-sich-Bestimmtheit des Wahrheitswertes dieser Aussageformen. So kennt zwar die fiktive Prädikatenlogik kein

⁶⁴⁾ WEYL, Hermann: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1948 (2.unv.Aufl.), p.14

⁶⁵⁾ Ibid., p.14

effektives Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit ihrer Aussageformen wie die Aussagenlogik, doch kann mittels des GÖDELSchen Vollständigkeitstheorems⁶⁶⁾ die Axiomatisierbarkeit der Menge M aller prädikatenlogischen Theoreme bewiesen werden.

2.2 ZUR CHARAKTERISIERUNG DER AXIOMATISIERBARKEIT IN DER KLAS- SISCHEN LOGIK

2.201 Nach HERMES⁶⁷⁾ unterscheidet man zwischen syntaktischer und semantischer Axiomatisierbarkeit. Dabei stellt sich heraus, daß syntaktische Axiomatisierbarkeit gleichbedeutend ist mit effektiver Aufzählbarkeit. Diese ist von Bedeutung für die GÖDELSche Beweisführung⁶⁸⁾, nach der die Axiomatisierung der Prädikatenlogik als *Existenztheorem* betrachtet wird. Diese Annahme kennzeichnet wiederum die ontologische Auffassung der fiktiven Logik:

"Jede Bezugnahme auf Handlungen, auf unseren deduktiven Umgang mit Axiomen und Regeln, ist hier sorgfältig vermieden. Die Aufstellung eines Logikkalküls mit operativen Regeln zur Ableitung von Ausdrücken findet vielmehr erst ihre Rechtfertigung durch dieses Existenztheorem, also durch eine Erkenntnis über Seiendes, durch eine ontologische Erkenntnis."⁶⁹⁾

2.21 Die *syntaktische* Axiomatisierbarkeit der Menge M der allgemeingültigen prädikatenlogischen Aussageformen ist eine Kalkülbetrachtung, die vorwiegend theoretisches Interesse besitzt. Im einzelnen, konkreten Fall wählt die klassische Logik natürlich einfachere Axiomatisierungen. Ein Kalkül genügt dann - in dieser Betrachtung - folgenden Forderungen:

2.2101 Man operiert mit endlichen Zeichenreihen, die aus einem

⁶⁶⁾ GÖDEL, Kurt: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Mh. Math. Phys.*, vol. 37 (1930), pp. 349-360

⁶⁷⁾ HERMES, Hans: Zum Begriff der Axiomatisierbarkeit, *Mathematische Nachrichten*, vol. 4 (1951), pp. 343-347

⁶⁸⁾ Vergl. Fußnote 66

⁶⁹⁾ LORENZEN(4), p. 13

Vorrat endlicher oder abzählbar unendlicher Einzelzeichen gebildet werden⁷⁰⁾. Diese Zeichenreihen können nach der Methode GÖDELS den natürlichen Zahlen ein-eindeutig zugeordnet werden. Auf diese Weise kann im Kalkül selbst mit natürlichen Zahlen operiert werden.

2.2102 Die überhaupt bildbaren Zeichenreihen haben als Teilmenge M die als gültig anerkannten Zeichenreihen. Betrachtet man weiter eine Teilmenge M_0 von M ($M_0 \subseteq M$), die eindeutig endlichen Charakter hat. Vermittels endlich vieler vorgegebener Schlußregeln, die endlichstellige Relationen darstellen, gewinnt man aus den Zeichenreihen von M_0 die Zeichenreihen von M . Diese Menge M ist abgeschlossen gegen eine derartige Relation $R_r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mathcal{C})$ zwischen Zeichenreihen dann und nur dann, wenn gilt:

Für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mathcal{C}$, die für ein beliebiges endliches r : $R_r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mathcal{C})$ und $\alpha_1 \in M, \dots, \alpha_n \in M$ erfüllen, folgt stets $\mathcal{C} \in M$.

2.2103 Wie sich leicht zeigen läßt, ist die Menge der unter 2.2101 aufgeführten Zeichenreihen rekursiv aufzählbar: Sie bildet den Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, deren Argumente und Werte Zeichenreihen sind, die auf die natürlichen Zahlen abgebildet werden können, heißt berechenbar genau dann, wenn die Relation entscheidbar ist, die zwischen $x_1, \dots, x_n, y$ genau dann besteht, wenn $f(x_1, \dots, x_n) = y$ ist.

Die Entscheidbarkeit der gegebenen Schlußrelationen muß also gefordert werden, um ein allgemeines Verfahren zu erhalten, mittels dem man für beliebige Argumente in endlich vielen Schritten feststellen kann, ob sie in der betreffenden Relation stehen oder nicht. Ohne die Forderung der Entscheidbarkeit der Relationen wäre jede Menge axiomatisierbar.

⁷⁰⁾ Die Umgangssprache hat ein endliches Alphabet (26 Buchstaben in der deutschen, 35 in der russischen Umgangssprache). Formale Systeme zeichnen sich dagegen meist durch einen unendlichen Vorrat an Variablen aus. Eine abzählbar unendliche Zeichenreihe wäre etwa die folgende: $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', x''', \dots$

2.211 Eine Theorie heißt nun syntaktisch axiomatisierbar dann und nur dann, wenn ihre Satzmenge M_t kalkülmäßig so gewonnen werden kann, daß die Forderungen 2.2101-03 erfüllt werden:

D 2.2-1 Eine Menge M von Zeichenreihen (natürlichen Zahlen) heißt syntaktisch axiomatisierbar, wenn es eine endliche Teilmenge M_0 von M und endlich viele entscheidbare endlichstellige Relationen $R_1, \dots, R_n$ gibt, so daß M die kleinste M_0 umfassende Menge ist, die abgeschlossen ist in Bezug auf $R_1, \dots, R_n$ ⁷¹⁾.

2.22 Die s e m a n t i s c h e Axiomatisierbarkeit sei als weiteres beweiskräftiges Verfahren der fiktiven Logik kurz skizziert. Wieder ist der Ansatz ontologisch fundiert.

2.221 Das klassische Beispiel einer axiomatischen Wissenschaft ist die vielzitierte EUKLIDische Geometrie: Endlich viele inhaltliche Sätze konstituieren das Axiomensystem. Die Menge der geometrischen Sätze stimmt überein mit den Folgerungen des Axiomensystems.

Der formalistische Ansatz HILBERTs hat zunächst die Vagheit der überlieferten inhaltlichen Betrachtung beseitigt: Man sagt, die im System verwendeten Begriffe werden durch die Axiome i m p l i z i t ⁷²⁾ definiert. Man spricht dann von sog. Eigenbegriffen des Axiomensystems. Diese haben ausschließlich die durch die Axiomengruppe formulierten Eigenschaften. Eventuelle Bedeutungen der verwendeten Ausdrücke außerhalb des Systems sind dabei völlig belanglos; z.B. der Begriff "Gerade" in umgangssprachlicher Bedeutung ist für die jeweilige Bedeutung innerhalb eines beliebigen geometrischen Systems in keiner Weise relevant. Eine weitere Präzisierung ist durch die explizite Erklärung erreicht worden, wann überhaupt von einer Aussage als einer "Folgerung der Axiome" gesprochen werden kann:

71) HERMES, Hans: loc.cit., p.345

72) LORENZEN weist zurecht auf die Vagheit dieser Bezeichnung hin, die sich aber als terminus technicus der fiktiven Logik allenthalben durchgesetzt hat. In LORENZEN(7), p.170 liest man über die "impliziten Definitionen": "Das, was man so nennt, verdient m.E. diesen Namen jedoch keinesfalls. Ein Axiomensystem $\mathcal{A}$ mit den Begriffssymbolen $B_1, B_2, \dots$ für die undefinierten Grundbegriffe definiert zwar die Klasse der Modelle von $\mathcal{A}$, und also in jedem Modell Begriffe, aber von einer Definition, also einer eindeutigen Festlegung, von Begriffen auch ohne Bezugnahme auf ein Modell kann keine Rede sein. Der Terminus "implizite Definition" scheint mir sehr viel zur Verschleierung dieses Tatbestandes beizutragen."

2.2211 Inhaltliche Grundrelationen (z.B. die geometrischen Grundrelationen "liegt auf", "koinzidiert mit") werden bei diesem Ansatz als Variable betrachtet: Die Aussagen einer Theorie werden zu **A u s s a g e f o r m e n**.

2.2212 Außerdem wird definiert: Eine Aussageform H ist eine **F o l g e r u n g** einer vorgegebenen Menge $\mathcal{M}$ von Aussageformen dann und nur dann, wenn jedes **M o d e l l** von $\mathcal{M}$ auch ein Modell von H ist⁷³⁾.

2.222 Auf dem Modellbegriff beruhende Theorien bezeichnet man nach TARSKI als semantisch. Das beweiskräftige Verfahren, das 2.2211 und 2.2212 genügt, heißt deshalb semantische Axiomatisierbarkeit.

Logisch-mathematische Gebilde liefern bei der Deutung formale Modelle, reale Gegenstände reale Modelle eines Axiomensystems. Die Konstruktion eines solchen Modells erfolgt jeweils durch Interpretation der Eigenbegriffe ("uneigentliche Begriffe" nach CARNAP) des Axiomensystems durch eigentliche Begriffe. Nach REICHENBACH nennt man diese Deutungsregeln "Zuordnungsdefinitionen"⁷⁴⁾.

2.3 KALKÜLISIERUNG IM RAHMEN DER OPERATIVEN LOGIK

2.31 Der operative Ansatz LORENZENs hat im mathematischen Grundlagenstreit zwischen dem HILBERTschen Formalismus und dem auf BROUWER zurückgehenden Intuitionismus (Konstruktivismus) eine versöhnende Stellung gefunden: Die finite Metamathematik betrachtet eine ganz bestimmte Gruppe von Kalkülen, nämlich die "Formalisierungen" mathematischer Theorien. CURRY⁷⁵⁾ spricht von der Mathematik geradezu als der "Theorie der Kalküle". LORENZEN schwächt diese These ab, indem er beliebige Kalküle zum Gegenstand seiner operativen Mathematik macht: "Die Theo-

⁷³⁾ Wie SCHOLZ gezeigt hat, findet sich ein so konzipierter Ansatz bereits in ausführlicher Darstellung in der BOLZANOschen "Wissenschaftslehre", Band II, § 155 (SCHOLZ, Heinrich: Die Wissenschaftslehre BOLZANOs, Abhandlungen der FRIESSchen Schule, n.F. 6 (1937), pp.401-472)

⁷⁴⁾ CARNAP wendet sich verschiedentlich gegen die Verwendung dieser Bezeichnung, da eine explizite Definition natürlich in keiner Weise vorliegt.

⁷⁵⁾ CURRY(1)

rie der Kalküle gehört jedenfalls zur Mathematik."⁷⁶⁾

Unter einem Kalkül wird dabei ein System von Regeln verstanden, das ein Operieren mit Figuren gestattet. Diese Figuren brauchen sich nach CURRY nicht nur auf Schreibfiguren (marks on paper) zu beschränken: Sie können sich auch aus anderen Artefakten wie Steinchen, verschiedenfarbige Spielfiguren oder gar Strickmaschen zusammensetzen. Die Beschränkung in der Betrachtung auf Schreibfiguren ist rein pragmatischer Natur.

2.311 HERMES schreibt über dieses Operieren, dieses tätige Handeln mit konkreten Dingen:

"Diese Dinge müssen hinreichend deutlich voneinander abgegrenzt sein. Sie können aus Steinchen (Rechenpfennigen, Holzkügelchen) bestehen, wie sie z.B. bei dem klassischen A b a k u s oder im japanischen S o r o b a n verwendet werden, sie können Symbole sein, wie sie in der Mathematik vorkommen (z.B. 2, x, +, (, $\int$), sie können aber auch Zahnräder einer Tischrechenmaschine sein oder elektrische Impulse, wie sie bei großen Rechenautomaten üblich sind."

Und das Fazit:

"Das Operieren besteht darin, daß man räumlich oder zeitlich geordnete Dinge in neue Konfigurationen gebracht hat."⁷⁷⁾

2.32 Die von den Formalisten geschaffene axiomatische Auffassung der Logik läßt die verschiedenen formalen Systeme als kontingente Theorien verstehen: Die inhaltlichen Aussagen der Modelle rechtfertigen die für den entsprechenden Gegenstandsbereich (Arithmetik, Geometrie, Quantenmechanik, Biologie, Rechtswissenschaft) zutreffende Logik. Dagegen

"begreift die operative Auffassung der Logik die Gesetze dieser Logik nicht mehr als willkürlich gewählte, lediglich dem jeweiligen Sachgebiet angepaßte Behauptungen, sondern als Regeln, deren Evidenz sich jetzt aus einer

⁷⁶⁾ LORENZEN(5), p.4

⁷⁷⁾ HERMES, Hans: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit; Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961, p.3

Reflexion über die Möglichkeiten des schematischen Operierens mit Figuren nach gewissen Regeln ergibt."⁷⁸⁾

2.33 Der Intuitionismus in seiner konsequenten Auffassung hat zwar die axiomatische Begründung verworfen und anstelle der klassischen aristotelischen Forderung nach der Wahrheitsevidenz der Axiome tritt eine bei jedem Beweisschritt erforderliche Intuition.⁷⁹⁾

Die Beschränkung des Gegenstandes in der operativen Logik und Mathematik von LORENZEN grenzt nun aber Mathematik im engeren Sinn (Arithmetik, Analysis, Algebra, Topologie) ab gegen die anderen formal behandlungsfähigen Gebiete. Die Untersuchungen von Axiomensystemen der Geometrie, physikalischer Teilgebiete, der Volks- und Rechtswissenschaft, der Psychologie, ja selbst der Metaphysik bleibt jedoch im Rahmen des Operativen, wenn man von den Bedeutungen der dort vorkommenden Relationen absieht: Nur die Gründe, die zur Wahl der Axiomensysteme führen, liegen außerhalb der operativen Mathematik. In der Geometrie liegen sie etwa in dem Bezug auf die räumliche Wirklichkeit:

"Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß für unsere Auffassung nicht zuerst ein Logikkalkül vorhanden ist, der nachträglich zu deuten ist, sondern daß unsere Methode vom schematischen Operieren als dem unmittelbar gegebenen ausgeht und von da aus zu einem Logikkalkül als einem Hilfsmittel für weitere Untersuchungen führt."⁸⁰⁾

2.34 Kalküle und Metakalküle im operativen Sinn:

2.341 Die unter 2.31 skizzierten Figuren (A,B,C,...) legen zusammen mit Regeln von der Form $a \rightarrow b$ einen Kalkül fest. Die Buchstaben "A", "B", "C", ... dienen als Mitteilungsvariable für Aussagen. Dagegen sind "a" und "b" Namen für Aussagevariable.⁸¹⁾

⁷⁸⁾ MITTELSTAEDT(1), p.323

⁷⁹⁾ Daher leitet sich die eigentlich ziemlich verwirrende Bezeichnung "Intuitionismus" her, die bei Außenstehenden geradezu mystische Assoziationen wecken kann. Der Begriff "Konstruktivismus" sagt eigentlich weit mehr aus über die Intentionen dieser Richtung in der Grundlagenforschung. Während jedoch der Terminus "konstruktiv" eine methodische Forderung beinhaltet, kennzeichnet "operativ" den Gegenstand einer Untersuchung.

⁸⁰⁾ LORENZEN(5), p.48

⁸¹⁾ Man kann dadurch von einer Aussage A sprechen, dagegen nicht von einer Aussage a.

"a" deutet hier als Variable effektive Figuren an, die bereits im Kalkül K produziert wurden. Dieses Herstellen von Figuren (Aussagen) geschieht durch Anwendung der Regeln: Dabei besagt $a \rightarrow b$, daß zu einer bereits geschaffenen Figur a auch die Figur b hergestellt werden kann. Alle durch die Verfahren erzeugte Figuren nennt LORENZEN "Aussagen". Das Herstellen von Figuren nach den Kalkülvorschriften heißt "Ableiten". " $\rightarrow$ " dient dabei als Zeichen für ein Operationssignal.

2.342 "Ableitbare Aussage" wird eine mit den Anfängen (Kalkül-
atomen von beliebiger Form wie $+, 0, I, \dots$) und Regeln von K
hergestellten Figur genannt. Der Begriff der Ableitbarkeit
braucht jedoch in der operativen Logik nicht explizit definiert
werden, etwa, daß man ausführen würde: "Es gibt endlich viele
Zeichen, so daß ..." Es genügt lediglich, hinreichend viele
Beispiele von Ableitungen durchzuführen und sie jeweils mit
einem vorgesetzten $\vdash$ zu markieren. Zur Abgrenzung von dem Teil
der Logik, der von den logischen Konstanten handelt, nennt
LORENZEN dieses bisher betrachtete Gebiet " P r o t o l o -
g i k " .

2.343 Betrachten wir dieses Problem unter einem anderen Aspekt:
Der Ableitbarkeitsbegriff ist hier zwar nicht explizit, aber
in echter Alternative hierzu, induktiv (rekursiv) definiert.
Der Kalkül ist eine induktive Definition einer Relation zwi-
schen Figuren. Die nach den Regeln aus den Anfängen ableitba-
ren variablenfreien Formeln bilden die zu definierende Klasse
von ableitbaren Aussagen (Figuren). Durch diese induktive De-
finition erhält man offensichtlich eine (rekursiv-) aufzähl-
bare Menge von Figuren.

Und dreht man nun den Spieß herum, so kann man sagen: Das Regel-
system einer induktiven Definition ist ein Kalkül. Damit bil-
den jedoch die Beweise der Ableitbarkeit einer Figur in einem
Kalkül einen Typ von Beweisen, die auf nichts Unbeweisbares
zurückgreifen. Sie greifen ausschließlich auf die induktive
Definition zurück.

2.344 Die explizite Aufführung aller notwendigen Schritte zur

Herstellung einer ableitbaren Aussage wird Ableitungsschema δ genannt. Die letzte Zeile einer solchen Operation heißt "Endaussage" ϵ_δ . LORENZEN nennt nun eine Regel R zulässig im Kalkül K dann und nur dann, wenn jedes Ableitungsschema δ , das eine Regel R verwendet, ersetzt werden kann durch ein Ableitungsschema δ' , das R nicht benützt, und trotzdem zur gleichen Endaussage $\epsilon_{\delta'} = \epsilon_\delta$ führt⁸²⁾.

Anders formuliert: Ist ein Kalkül K durch endlich viele definierende Regeln festgelegt, so ist eine beliebige Regel R zulässig in Bezug auf K dann und nur dann, wenn in dem Kalkül K' der durch Hinzunahme von R zu den Regeln von K entsteht, nicht mehr abgeleitet werden kann als in K.

Betrachtet man nun noch die Kalkülanfänge als spezielle Regeln ohne Vorderformeln, so ist die Eliminierung der Kalkülatome in der Definition mit einbegriffen. Diese Eliminationsverfahren bilden für die operative Auffassung der Logik geradezu das eigentliche Fundament der Logik.

LORENZEN untersucht die verschiedenen Verfahren, nach denen die Regeln eliminiert werden können in seiner "Protologik"⁸³⁾. Die fünf Prinzipien der Deduktion, Induktion, Inversion, Gleichheit und Unableitbarkeit liefern zulässige Regeln für die Kalküle.

2.345 Metakalküle haben als Aussagen die Regeln der Kalküle. Eine Metaregel gestattet dabei die Hinzunahme einer weiteren Regel zum Metakalkül: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$. In dieser allgemeinen Form einer Metaregel, der unter 2.341 angeführten Regel $a \rightarrow b$ analog gebaut, ist nun das Symbol " $\rightarrow$ ", das bei den Kalkülen zur Mitteilung der zu vollziehenden Operation diente, eine bedeutungsfreie Figur. Das Symbol tritt als Bestandteil der Aussagen des Metakalküls auf. Dagegen übernimmt " $\rightarrow$ " die bisherige Bedeutung von " $\rightarrow$ ".

⁸²⁾ Dies bedeutet jedoch keine Aussage über die formale Identität im klassischen Sinne: Die Protologik operiert ja mit materiellen Konstruktionen von Figuren, in unserem Falle von Schreibfiguren.

⁸³⁾ LORENZEN(5), pp.21-37

"Eine zulässige Metaregel von K ist also eine Regel über Regeln, die, angewandt auf zulässige Regeln von K, stets wieder eine zulässige Regel von K liefert."⁸⁴⁾

Die zulässigen (gültigen) Metaregeln definieren also einen neuen Kalkül zur Ableitung von Regeln. Frägt man nun nach den gültigen Metaregeln dieses neuen Kalküls, gelangt man zu Meta-metaregeln des ursprünglichen Kalküls. In dieser Weise kann man natürlich unbegrenzt fortschreiten.

"Die Durchführung dieses Ansatzes zeigt, daß man durch die operative Auffassung der Regeln, Metaregeln usw. genau zu den Ausdrücken gelangt, die als Theoreme der positiven oder intuitionistischen Implikationslogik bekannt sind."⁸⁵⁾

Damit ist der Schritt von der Protologik zur eigentlichen Logik getan. Unter 2.4 soll die Zusammensetzung von Aussagen mit den logischen Partikeln im operativen Sinne geklärt werden. Die Anwendungsmöglichkeiten der protologisch erzeugten Kalküle interessieren zunächst ansonsten überhaupt nicht: Man betrachtet sie als reine S p i e l k a l k ü l e .

2.35 LORENZENs Untersuchungen weisen durch ihre Fragestellung in eine gänzlich verschiedene Richtung von der "ontologisierenden" klassisch-axiomatischen Mathematik und Logik. Das Operieren mit Zeichen bzw. Figuren nach bestimmten Regeln ist eine Tätigkeit, die jeder Mathematiker und Logiker auszuführen gelernt hat: Dies vollzieht sich ganz unabhängig davon, wie er nun diese Tätigkeit auffaßt oder deutet:

"Das Ableiten von Figuren nach einem Kalkül zu lernen, heißt ja nur, die Ausführung von Operationen lernen.",

erläutert LORENZEN:

"Es ist unabhängig davon, wie wir darüber sprechen -

⁸⁴⁾ LORENZEN(5), p.43

⁸⁵⁾ LORENZEN(4), p.17

genauso wie ein Kind z.B. gehen lernen kann, ohne schon über das Gehen sprechen zu können."⁸⁶⁾

2.4 DIE OPERATIVE INTERPRETATION DES LOGISCHEN SCHLIESSENS

2.41 Wir haben gesehen (2.345), daß man durch die operative Auffassung der Regeln und Metaregeln von Kalkülen genau die Theorie des positiven oder intuitionistischen Implikationskalküls erhält. Um aber über Aussagen dieser Art oder des einfachsten Typs "die Figur A ist ableitbar" hinauszugehen, bietet sich Verknüpfung von Figuren (=Aussagen) mit den logischen Partikeln an. Dabei kann sich jedoch eine effektive Logik nicht auf die semantische Definition der klassischen Logistik stützen, da diese ja die Wahrheitsdefintheit aller Aussagen voraussetzt. Diese Forderung ist jedoch für eine "natürliche" Logik fiktiv, da sie eine Ontologie im PLATONistischem Sinne voraussetzt.

2.411 Es waren vor allem die Partikel $\rightarrow$, $\neg$, A_x , die langezeit Schwierigkeiten bereiteten, um ein befriedigendes semantische Analogon der konstruktiven Logiken zum klassischen Begriff der Wahrheitsdefintheit zu liefern. LORENZENs Begriff der "Beweisdefintheit" scheint nun diese Schwierigkeiten endgültig überwunden zu haben. Zunächst wird der Defintheitsbegriff induktiv definiert:

- D_(i) 2.4-1 (1) Jede durch schematische Operation entscheidbare Aussage heißt definit.
- (2) Ist für eine Aussage ein definiter Beweis- oder Widerlegungs-begriff⁸⁷⁾ festgelegt, dann heißt die Aussage selbst definit, d.h. beweis- oder widerlegungsdefinit.

⁸⁶⁾ Bemerkenswert und interessant scheint die geistige Relevanz der LORENZENschen Protologik zur Idee der "Sprachspiele" in der späteren Philosophie WITTGENSTEINs: Auch in den "Philosophischen Untersuchungen" erscheint das Sprechen der Sprache, die Ausführung des "Sprachspiels" als "Teil einer Tätigkeit, oder einer Lebensform": Man führt Operationen mit Worten aus, ohne im einzelnen ihre genaue Bedeutung zu kennen. Auch bei WITTGENSTEIN erscheint der Vergleich mit dem Lernprozeß des Kindes: Es lernt Zweck und Funktion der Wörter, es lernt, was es mit bestimmten artikulierten Lautreihen der Sprache anfangen kann und soll. Von einem allgemeinen Bedeutungsbegriff ahnt es nichts, aber es lernt sprechen: "Das Benennen ist noch gar kein Zug im Sprachspiel, - so wenig, wie das Aufstellen einer Schachfigur ein Zug im Schachspiel. Man kann sagen: Mit dem Benennen eines Dinges ist noch nichts getan. Es hat auch keinen Namen, außer im Spiel." (WITTGENSTEIN(2) Punkt 49)

⁸⁷⁾ Eine normale Beweisführung für eine Aussage "A ist ableitbar in K" erfolgt als Angabe der Ableitung. Schematisches Operieren gestattet dabei zu entscheiden, ob ein Gebilde eine Ableitung ist oder nicht. Bei der Negationsaussage "A ist unableitbar in K" ist zwar kein Beweisbegriff, aber ein Widerlegungs-begriff definiert: Durch einen Beweis der Ableitbarkeit von A ist die Aussage widerlegt. Primär gibt es also keine Negation in der operativen Logik.

2.412 Eine Deutung der logischen Partikel, die den konstruktiven Forderungen gerecht wurde, hatte 1932 schon KOLMOGOROFF⁸⁸⁾ gegeben: Er betrachtete den Kalkül als eine Aufgabenrechnung, in der jede Variable für eine zu lösende Aufgabe steht. Der Begriff der "Aufgabe" wurde dabei von KOLMOGOROFF nicht explizit erläutert, kam aber auf die Forderung hinaus, eine bestimmte mathematische Konstruktion, einen "Algorithmus", anzugeben. Dabei werden als "Aufgabenfunktionen" eingeführt:

$A \wedge B$: Beide Aufgaben A und B sind zu lösen.

$A \vee B$: Mindestens eine der Aufgaben A, B ist zu lösen.

$A \rightarrow B$: Die Lösung von B soll auf die Lösung von A zurückgeführt werden.

$\neg A$: Vorausgesetzt, daß die Lösung von A gegeben ist, muß ein Widerspruch erzeugt werden.

$A_x A(x)$: Es ist eine allgemeine Methode anzugeben, nach der sich die Aufgabe A für jedes beliebige x lösen läßt.

$V_x A(x)$: Für ein bestimmtes x ist die Lösung der Aufgabe anzugeben.

Ist eine Aufgabe gelöst, so zeigt das vorgesetzte Zeichen - dies an. Enthält eine Formel das vorgesetzte Zeichen, so stellt sie keine Aufgabe mehr dar, sondern ist die Mitteilung über die Lösung einer Aufgabe. Enthält eine mit $\vdash$ versehene Formel Variablen, so ist sie für jede Substitution der Variablen durch Aufgaben gelöst.

$\vdash A \rightarrow B$ ist in dieser Interpretation keine faktische Implikation im Sinne von $\vdash \neg A$ oder $\vdash B$: Ist etwa die Aufgabe $A \rightarrow B$ gelöst ($\vdash A \rightarrow B$), so ist damit über die Lösung der Aufgabe $\neg A \vee B$ noch gar nichts ausgesagt. Ebenfalls lassen sich die Lösungen der Aufgaben $A_x A(x)$ und $V_x A(x)$ nicht ineinander überführen.

2.42 LORENZEN geht bei seiner operativen Interpretation der Junktoren und Quantoren von der Dialogsituation des Sprechens aus, in der sich Diskussionspartner gegenseitig zu widerlegen versuchen. Die Situation einer solchen Diskussion

⁸⁸⁾ KOLMOGOROFF(1) brachte erstmals diese Gedanken; vergl. hierzu vor allem die Darstellung bei HEYTING(2)

mit Argument und Gegenargument erfordert zwei Partner im "Sprachspiel": LORENZEN nennt sie **P r o p o n e n t** (P) und **O p p o n e n t** (O). Der Opponent hat dabei immer zwei Wahlmöglichkeiten, wenn der Proponent ihm eine Aussage vorlegt: (a) Nimmt O die Aussage an, hat er den Dialog verloren. (b) Zweifelt er die Aussage an, so muß P den Zweifel entkräften, indem er im einfachsten Fall einen Beweis liefert.

Somit liegt eine beweisdefinite (dialogisch-definite) Aussage genau dann vor, wenn effektiv geregelt ist, (a) wann das Ende eines Dialoges erreicht ist, (b) wann der Dialog als gewonnen bzw. verloren zu gelten hat und (c), daß ein Remis als ausgeschlossen zu gelten hat. Eine derartige Einführung der logischen Partikel $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ... erfolgt hier nicht durch Anknüpfen an die metasprachlichen Partikel "und", "oder", "impliziert", ... Sie erfolgt vielmehr in ähnlicher Weise, wie bei WITTGENSTEIN die Einführung der Wörter in seinen "Sprachspielen" erklärt wird: Der Ansatzpunkt ist das Ausüben, der Vollzug von Tätigkeiten. Logik und Mathematik in der konstruktiven Auffassung sprechen nicht über Zeichen; jede logische oder mathematische Theorie muß lediglich in einer Sprache mitgeteilt werden. Und diese muß natürlich für Sprecher und Hörer verständlich sein. Für den konstruktiv gesinnten Denker besteht das Wesen der formalen Methode nicht darin, daß über Zeichen gesprochen wird, sondern ausschließlich darin, daß Zeichen nach bestimmten Regeln benutzt werden.

2.43 Zum Aufbau der effektiven Logik der definiten Aussagen wird nun von LORENZEN der operative Sinn der Junktoren und Quantoren wie folgt festgelegt:

2.431 Die **K o n j u n k t i o n** ($A \wedge B$) fordert für den Dialog, daß P auf Verlangen von O sowohl für A als auch für B den Dialog gewinnen muß, wenn P den Dialog um die Aussage $A \wedge B$ gewinnen will.

Dialogschritte: (1) P legt die Aussage $A \wedge B$ vor. (2) O zweifelt die Aussage an; andernfalls verliert er den Dialog. (3) P legt O sowohl die Aussage A als auch die Aussage B vor. Dadurch spaltet sich der Dialog in zwei Teildialoge.

- 2.432 Die A d j u n k t i o n ($A \vee B$) kennzeichnet folgende Dialogsituation: Auf Verlangen von O muß P einen Beweis für A oder einen Beweis für B vorlegen.

Die symbolische Notation im Tableau (nach BETH) drückt diese Situation so aus:

O	P	O	P
	$A \vee B$		$A \vee B$
?	A	?	B
	$\vdots$		$\vdots$

- 2.433 Die S u b j u n k t i o n ($A \rightarrow B$) wird durch folgende Dialogschritte festgelegt:

(1) P legt die Aussage $A \rightarrow B$ vor. (2) Darauf legt O die Aussage A vor. (3) P hat nun die Wahl, entweder die Aussage A anzugreifen oder aber diese Aussage O zuzugeben und gleichzeitig für die Aussage B einen Beweis vorzulegen.

- 2.434 Auch die G e n e r a l i s a t i o n ($A_x A(x)$) erhält ihren operativen Sinn im Dialog durch die folgenden Schritte:

(1) P legt die Aussage $A_x A(x)$ vor. (2) O kann nun einen beliebigen Gegenstand n des Variabilitätsbereiches von x zu wählen und $A(n)$ in Zweifel ziehen. (3) Nun hat P die Verpflichtung, gemäß der Wahl von O $A(n)$ zu verteidigen.

Damit werden Allaussagen zu U r t e i l s a n w e i s u n g e n im WEYLSchen Sinne: LORENZEN spricht daher bei der Generalisation auch von "großer Konjunktion".

- 2.435 Die Dialogsituation für die P a r t i k u l a r i s a t i o n (Einsquantifikation) ergibt sich wie folgt:

(1) P legt die Aussage $V_x A(x)$ vor. (2) O zieht diese Aussage in Zweifel. (3) P kann daraufhin selbst einen beliebigen Gegenstand n des Variabilitätsbereiches von x auswählen und die Aussage $A(n)$ verteidigen.

Existenzaussagen werden somit zu U r t e i l s a b s t r a k t a im Sinne WEYLS.

Die Dialogsituationen für die beiden Aussagen $A_x A(x)$ und $V_x A(x)$ spiegeln sich in den Tableaux:

O	P	O	P
	$A_x A(x)$		$V_x A(x)$
?n		?	
	$A(n)$		$A(n)$
(O wählt n!)			(P wählt n selbst!)

2.44 Von grundlegender Bedeutung ist natürlich der operative Sinn des logischen Schließens. Mit Hilfe des Begriffes der "Gewinnstrategie" wird diese Aufgabe bewältigt: Wir nehmen an, P verpflichtet sich, den Dialog um die Aussage B zu gewinnen, unter der Voraussetzung, daß O den Dialog um die Aussage A gewonnen hat. Die Gewinnstrategie beschreibt dabei das Verhalten von P gegenüber jedem Einwand von O. Das Verhalten von P und O bestimmt dabei natürlich ausschließlich der operative Sinn von Junktoren und Quantoren.

Hängt dabei nun die Gewinnstrategie allein von der logischen Form der Aussagen ab, so sagt man, daß die Aussage B von der Aussage A logisch impliziert werde.

2.5 DIALOGSITUATIONEN IN SEQUENZENFORMULIERUNG

2.51 Durch ein regressives Vorgehen in den "semantischen" Tableaux" kann man die Gewinnstrategie auch in Form von Sequenzen formulieren. Jede Stellung des Dialogs wird in einer Sequenz notiert. Dabei schreibt man alle Aussagen, die O bisher vorlegte, links vom Operationssignal. "S" bezeichnet dabei das System aller vorliegenden Aussagen von O. Rechts vom Operationspfeil steht dabei die letzte Aussage von P: $S \rightarrow P$. Technisch gesprochen, werden die Tableaux auf diese Weise einfach auf den Kopf gestellt.

Dadurch werden die Endpositionen in den Tableaux zu Kalkülanfängen. Ein geschlossenes Tableau liegt vor, wenn O und P jeweils die gleiche Primformel behaupten. Primformeln sind dabei A, B, $A(x)$, V, A . Hierauf baut sich die rekursive Definition des Formelbegriffs auf.

KA 2.5-1 $S(E) \rightarrow_s E$

Für Primformeln ist ja die Dialogsituation $S \rightarrow_s E$ genau dann von P gewonnen, wenn sich die Aussage E unter den Aussagen des Systems S befindet. $S(E)$ bedeutet also, daß die Aussage E im System S enthalten ist. Die zweite Sequenz, die an den Anfang des Kalküls gestellt wird, dient der Negationseinführung im Sinne des Intuitionismus. Sinngemäß drückt sie das alte, schon den Scholastikern bekannte Prinzip "ex falso quodlibet" aus:

KA 2.5-2 $S(\perp) \rightarrow_s C$

Die Negation ($\neg A$) wird dann durch die konstruktivistische Definition eingeführt. Sie läßt sich dadurch im Kalkül immer eliminieren, daß man $\neg A$ als Abkürzung für $A \rightarrow \perp$ ansieht. In der Dialogsituation (Tableau-Schreibweise) äußert sich diese Negationseinführung, daß beim Vorlegen von $\neg A$ der Partner nicht bezweifelt, sondern direkt angreift: Dadurch bekommt auch die Negation ihren operativen Sinn. In den weiter unten (2.56) angeführten Beispielen wird dies unmittelbar einsichtig.

D 2.5-2 $\neg A \stackrel{\text{df}}{=} A \rightarrow \perp$

2.54 Aufgrund der Gewinnstrategie können nun Regeln aufgestellt werden, die sukzessive Dialogsituationen mit zusammengesetzten Aussagen auf Dialogstellungen mit einfacheren Aussagen zurückführen bzw. umgekehrt. Sie können als echtes Entscheidungsverfahren für eine effektive Aussagenlogik angesehen werden, als LEIBNIZsche ars iudicandi für intuitionistisch gültige Aussagen. Das umgekehrte Verfahren, die LEIBNIZsche ars inveniendi, ist die Methode der Aussagenerzeugung oder Ableitung. In den Axiomensystemen der klassischen Logik, aber auch der intuitionistisch gültigen von HEYTING und KLEENE, haben diese Opponenten- und Proponentenregeln (LORENZEN) ihre Analoga in metatheoretischen Einführungs- und Beseitigungsregeln für Junktor und Quantoren. GENTZEN nannte seine Regeln für seinen Sequenzkalkül Antezedens- und Sukzedensregeln. Wir verwenden die LORENZENsche Bezeichnung.

2.541 Konjunktionsregeln:

2.5411 Proponentenregel der Konjunktion

$$\begin{array}{c} \text{R 2.5-1} \quad (\rightarrow \wedge_{\text{eff}}) \quad \frac{S \rightarrow_3 A \text{ ,, } S \rightarrow_3 B \text{ }^{90)} \\ S \rightarrow_3 A \wedge B \end{array}$$

2.5412 Opponentenregeln der Konjunktion

$$\text{R 2.5-2} \quad (\wedge \rightarrow_{1\text{eff}}) \quad \frac{S(A \wedge B), A \rightarrow_3 C}{S(A \wedge B) \rightarrow_3 C}$$

$$\text{R 2.5-3} \quad (\wedge \rightarrow_{2\text{eff}}) \quad \frac{S(A \wedge B), B \rightarrow_3 C}{S(A \wedge B) \rightarrow_3 C}$$

2.542 Adjunktionsregeln:

2.5421 Proponentenregeln der Adjunktion

$$\text{R 2.5-4} \quad (\rightarrow \vee_{1\text{eff}}) \quad \frac{S \rightarrow_3 A}{S \rightarrow_3 A \vee B}$$

$$\text{R 2.5-5} \quad (\rightarrow \vee_{2\text{eff}}) \quad \frac{S \rightarrow_3 B}{S \rightarrow_3 A \vee B}$$

2.5422 Opponentenregel der Adjunktion

$$\text{R 2.5-6} \quad (\vee \rightarrow_{\text{eff}}) \quad \frac{S(A \vee B), A \rightarrow_3 C \text{ ,, } S(A \vee B), B \rightarrow_3 C}{S(A \vee B) \rightarrow_3 C}$$

2.543 Subjunktionsregeln:

2.5431 Proponentenregel der Subjunktion

$$\text{R 2.5-7} \quad (\rightarrow \rightarrow_{\text{eff}}) \quad \frac{S, A \rightarrow_3 B}{S \rightarrow_3 A \rightarrow B}$$

2.5432 Opponentenregel der Subjunktion

$$\text{R 2.5-8} \quad (\rightarrow \rightarrow_{\text{eff}}) \quad \frac{S(A \rightarrow B) \rightarrow_3 A \text{ ,, } S(A \rightarrow B), B \rightarrow_3 C}{S(A \rightarrow B) \rightarrow_3 C}$$

⁹⁰⁾ Der Übergang von einer Dialogsituation zu einer anderen wird durch den horizontalen Strich mitgeteilt. ".,," zeigt die Spaltung in Teildialoge an. Das einfache Komma trennt dagegen die Aussagen des Systems links vom Operationspfeil.

2.544 Negationsregeln:

2.5441 Proponentenregel der Negation

$$\text{R 2.5-9 } (\rightarrow \neg \text{ eff}) \quad \frac{S, A \rightarrow A}{S \rightarrow \neg A}$$

2.5442 Opponentenregel der Negation

$$\text{R 2.5-10 } (\neg \rightarrow \text{ eff}) \quad \frac{S(\neg A) \rightarrow A}{S(\neg A) \rightarrow C}$$

2.545 Generalisationsregeln:

2.5451 Proponentenregel der Generalisation

$$\text{R 2.5-11 } (\rightarrow A \text{ eff}) \quad \frac{S \rightarrow A(y)}{S \rightarrow A_x A(x)}$$

2.5452 Opponentenregel der Generalisation

$$\text{R 2.5-12 } (A \rightarrow \text{ eff}) \quad \frac{S(A_x A(x)), A(y) \rightarrow C}{S(A_x A(x)) \rightarrow C}$$

2.546 Partikularisationsregeln:

2.5461 Proponentenregel der Partikularisation

$$\text{R 2.5-13 } (\rightarrow V \text{ eff}) \quad \frac{S \rightarrow A(y)}{S \rightarrow V_x A(x)}$$

2.5462 Opponenten der Partikularisation

$$\text{R 2.5-14 } (V \rightarrow \text{ eff}) \quad \frac{S(V_x A(x)), A(y) \rightarrow C}{S(V_x A(x)) \rightarrow C}$$

Für die Regeln R 2.5-12 bis R 2.5-14 gilt als Variabilitätsbedingung: y darf in C und in $S(A_x A(x))$ bzw. $S(V_x A(x))$ nicht frei vorkommen.

2.55 Durch einen Äquivalenzbeweis für einen fiktiven Sequenzen-Kalkül, der den effektiven durch gewisse Restriktionen in den Regeln als Teilkalkül enthält, mit einem axiomatisch aufgebauten System der Junktoren- und Quantorenlogik mit den gleichen Eigenschaften liefert KLEENE⁹¹⁾ eine Art von Vollständigkeits-

⁹¹⁾ KLEENE(1), p.445 ff.

beweis für die effektive Logik. In der Sprache der "operativen Semantik" könnte man von "dialogischer Vollständigkeit" sprechen. Der GÖDELSche Vollständigkeitsbeweis für die Quantorenlogik, der, wie wir gezeigt haben (2.201) die Axiomatisierung der klassischen Prädikatenlogik als Existenztheorem betrachtet, kann aufgrund dieser fiktiven Postulierung kein intuitionistisches oder effektiv gültiges Korrelat haben.

2.56 Beispiele:

2.561 Die zwei klassisch gültigen Aussagen $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)^{92)}$ und $\vdash \neg\neg A_X A(x) \rightarrow A_X \neg\neg A(x)$ werden im Tableau auch als intuitionistisch gültig bewiesen. Sie sind also Aussagen der effektiven Logik.

O	P	O	P
$\neg(A \vee \neg A)$	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	$\neg\neg A_X A(x)$	$\neg\neg A_X A(x) \rightarrow A_X \neg\neg A(x)$
?	$A \vee \neg A$	?n	$A_X \neg\neg A(x)$
<u>A</u>	$\neg A$	$\neg A(n)$	$\neg\neg A(n)$
?	$A \vee \neg A$	-----	-----
=====	<u>A</u>	$A_X A(x)$	$\neg A_X A(x)$
		<u>A(n)</u>	?n
		=====	<u>A(n)</u>
			=====

2.562 Von der klassisch gültigen Aussage $\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ wird in Sequenzenformulierung der Dialogsituationen gezeigt, daß in der effektiven Logik nur $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ gilt, nicht dagegen die zweite Subjunktion $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

⁹²⁾ $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ ist gleichbedeutend mit $\vdash \neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$ und bringt den BROUWERSchen Satz von der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zum Ausdruck. "Er besagt, daß es nachweislich unlösbare Probleme nicht geben kann" (HEYTING).

	<u>S $\rightarrow_3$ (A $\rightarrow$ B) $\rightarrow$ ($\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A)</u>
($\rightarrow \rightarrow$ eff)	<u>S, A $\rightarrow$ B $\rightarrow_3$ $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A</u>
($\rightarrow \rightarrow$ eff)	<u>S, A $\rightarrow$ B, $\neg$B $\rightarrow_3$ $\neg$A</u>
($\rightarrow \neg$ eff)	<u>S, A $\rightarrow$ B, $\neg$B, A $\rightarrow_3$ $\perp$</u>
($\neg \rightarrow$ eff)	<u>S, A $\rightarrow$ B, $\neg$B, A $\rightarrow_3$ B</u>
($\rightarrow \rightarrow$ eff)	<u>S, A $\rightarrow$ B, $\neg$B, <u>A</u> $\rightarrow_3$ <u>A</u> ,, S, A $\rightarrow$ B, $\neg$B, A, <u>B</u> $\rightarrow_3$ <u>B</u></u>

Die Dialogsituation der komplexen Aussage ist in zwei Zweigen auf KA 2.5-1 zurückgeführt worden.

Die Aussage ($\neg$ B $\rightarrow$ $\neg$ A) $\rightarrow$ (A $\rightarrow$ B) ist dagegen nur klassisch gültig:

	<u>S $\rightarrow_3$ ($\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A) $\rightarrow$ (A $\rightarrow$ B)</u>
($\rightarrow \rightarrow$ eff)	<u>S, $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A $\rightarrow_3$ A $\rightarrow$ B</u>
($\rightarrow \rightarrow$ eff)	<u>S, $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A, A $\rightarrow_3$ B</u>
($\rightarrow \rightarrow$ eff)	<u>S, $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A, A $\rightarrow_3$ $\neg$B ,, S, $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A, A, $\neg$A $\rightarrow_3$ B</u>
	1.Teildialog auf keinen KA zurückführbar! <u>S, $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$A, <u>A</u>, $\neg$A $\rightarrow_3$ <u>A</u></u>

2.6 ZUSAMMENFASSUNG ZUM 2. KAPITEL:

Die klassische Logik fordert von allen sinnvollen Aussagen die Wahrheitsdefinitheit. Sie ist daher ontologisch konzipiert und beschreibt als Theorie die "Gesamtheit der Wahrheiten, die gültig sind in jeder möglichen Welt". Unendliche Bereiche können somit im platonischen Sinne als an-sich existierende abgeschlossene Gesamtheiten betrachtet werden. Dieser platonische Realismus bestimmt im gleichen Maße die Metalogik. Konstruktivistisch gesinnte Denker bezeichnen diese Voraussetzungen als fiktiv. Das GÖDELSche Vollständigkeitstheorem für die Prädikatenlogik beweist die Axiomatisierbarkeit der Menge aller prädikatenlogischen Theoreme. GÖDELS Annahme einer derartigen Axiomatisierung als Existenz-

theorem kennzeichnet den fiktiv-logischen Charakter der Beweisführung. Als beweiskräftige Verfahren von Relevanz, die in der fiktiven Logik angewandt werden, gelten syntaktische und semantische Axiomatisierbarkeit: Hier gilt der nachträglich zu deutende Logikkalkül als das unmittelbar gegebene. LORENZENs operativer Ansatz versteht dagegen unter einem Kalkül ein System von Regeln, das ein Operieren mit konkreten Figuren (=Aussagen) gestattet. Der Kalkül wird zur rekursiven Definition einer Relation zwischen Figuren. Er ist Herstellungsvorschrift für Aussagen. Dieses Herstellen ("Ableiten") ist kein logisches Schließen: Kalkülanfänge und Regeln sind willkürlich gewählt. Die Evidenzforderung, durch die formalisierte Logik zunächst verbannt, erscheint deshalb wieder unter neuem Aspekt: Nicht über die Einsichtigkeit der "Axiome", sondern über die Möglichkeiten des schematischen Operierens wird reflektiert. Das semantische Analogon der effektiven Logik für die wahrheitsdefinite Aussage der Klassischen Logik ist die beweisdefinite (dialogisch definite) Aussage. Die operative Interpretation der Junktoren und Quantoren geht dabei von der Dialogsituation des Sprechens aus, in der sich zwei Diskussionspartner gegenseitig zu widerlegen versuchen. Der Ansatzpunkt für diese Einführung der logischen Partikel ist der Vollzug von Tätigkeiten, nicht das Anknüpfen an metasprachliche Partikel. Dialogsituationen dieser Art lassen sich im Tableau (BETH) oder als Sequenz (GENTZEN) formulieren. Eine "Gewinnstrategie" verleiht dem logischen Schließen seinen operativen Sinn. Mit ihrer Hilfe können Regeln für den Sequenzenkalkül aufgestellt werden. Dieser Kalkül erweist sich als identisch mit dem GENTZENschen Sequenzenkalkül, der ohne Interpretation aufgrund der "Natürlichkeit der Regeln" aufgestellt wurde.

3. K a p i t e l :

DER AUFBAU EINES SEQUENZENKALKÜLS FÜR DIE EFFEKTIVE UND FIKTIVE QUANTENLOGIK

Nur von dem letztlich ontologischen Standpunkt der Logik, dem es nur um das Wahr- oder Falsch-Sein von Sätzen geht, ist es verständlich, daß man in logische Schwierigkeiten mit dem in der modernen Physik auftretenden Begriff der "Unbestimmtheit" kommt.

Gerhard F R E Y

3.1 INTUITIVE BETRACHTUNGEN ZUM LOGISCHEN SCHLIESSEN BEI NICHT GLEICHZEITIG ENTSCHEIDBAREN KALKÜLAUSSAGEN

3.11 In der physikalischen Meßtheorie spricht man von zwei Eigenschaften E_A und E_B als k o m m e n s u r a b l e n Eigenschaften, wenn die Meßung der einen das Vorhandensein der anderen nicht zerstört. In den Klassischen Theorien ist dies praktisch durchweg gewährleistet, in der Quantenmechanik jedoch im allgemeinen n i c h t . Für eine Abbildung physikalischer Meßaussagen auf Kalkülaussagen, wie sie in unserem Logiksystem für physikalische Aussagen vollzogen wird, ist dies natürlich von Bedeutung.

Vor wir jedoch die Kommensurabilität mittels der Logik der Eigenschaften streng definieren wollen⁹³⁾, soll ein lebendiges Beispiel aus einer völlig anderen Sphäre den intuitiven Zugang zur quantenlogischen Problematik schaffen: Kommensurabilität wird sich als Verschärfung des Begriffes der gleichzeitigen Meßbarkeit herausstellen. Die gleichzeitige Nachprüfbarkeit von Kalkülaussagen kann jedoch von Bedeutung für das logische Schließen sein: Dies ist das Fazit einer Fabel "aus ferner Zeit", die SPECKER⁹⁴⁾ in einer Abhandlung in der Zeitschrift "Dialectica" zitiert. Diese kleine Erzählung bringt die quantenlogische Problematik im Gewand einer Fabel aus den Tagen von "Tausend und einer Nacht". Lassen wir SPECKER selbst "erzählen":

⁹³⁾ Vergl. weiter unten.

⁹⁴⁾ SPECKER(1), p.241

"An der assyrischen Prophetenschule in Arba'ilu unterrichtete zur Zeit des Königs Asarhaddon ein Weiser aus Ninive. Er war ein hervorragender Vertreter seines Faches (Sonnen- und Mondfinsternisse), der außer an den Himmelskörpern fast nur an seiner Tochter Anteil nahm. Sein Lehr-erfolg war bescheiden, das Fach galt als trocken und ver-langte wohl auch mathematische Vorkenntnisse, die kaum vorhanden waren. Fand er so im Unterricht bei den Schülern nicht das Interesse, das er sich gewünscht hätte, so wurde es ihm auf anderem Gebiet im überreichen Maße zuteil: Kaum hatte seine Tochter das heiratsfähige Alter erreicht, so wurde er von Schülern und jungen Absolventen mit Heirats-anträgen für sie überhäuft. Und wenn er auch nicht glaubte, daß er sie für immer bei sich behalten wollte, so war sie doch noch viel zu jung und die Freier ihrer auch kei-neswegs würdig.

Und damit sich jeder gleich selbst von seiner Unwürdigkeit überzeugen konnte, versprach er sie demjenigen zur Frau, der eine ihm gestellte Aufgabe im Prophezeien löse. Der Freier wurde vor einen Tisch geführt, auf dem reihweis drei Kästchen standen, und aufgefordert, anzugeben, welche Kästchen einen Edelstein enthalten und welche leer seien. Und wie mancher es auch versuchte, es schien unmöglich, die Aufgabe zu lösen. Nach seiner Prophezeiung wurde näm-lich jeder Freier vom Vater aufgefordert, zwei Kästchen zu öffnen, welche er beide als leer oder beide als nicht leer bezeichnet hatte: Es stellte sich stets heraus, daß das eine einen Edelstein enthielt und das andere nicht, und zwar lag der Edelstein bald im ersten, bald im zweiten der geöffneten Kästchen. Wie aber sollte es möglich sein, von drei Kästchen weder zwei als leer noch zwei als nicht leer zu bezeichnen? Die Tochter wäre wohl bis zum Tode ihres Vaters ledig geblieben, hätte sie nicht nach der Prophezeiung eines Prophetensohnes hurtig selbst zwei Kästchen geöffnet, und zwar eines von den als gefüllt und eines von den als leer bezeichneten, welche sich denn auch wirklich als solche erwiesen. Auf den schwachen Pro-test des Vaters, daß er zwei andere Kästchen geöffnet ha-

ben wollte, versuchte sie auch noch das dritte Kästchen zu öffnen, was sich aber als unmöglich erwies. Worauf der Vater die nicht widerlegte Prophezeiung brummend als gelungen gelten ließ."

Soweit also die SPECKERSche Fabel von den prophetisch verhielten Freiern aus dem Morgenland. In der Naturwissenschaft des 20. Jahrhunderts haben sie "Leidensgefährten" bekommen, allerdings nur bezüglich des prophetischen Sektors: Von wenigen Annahmefällen abgesehen, können nämlich die Physiker über ein quantenmechanisches System keine konsistenten Prophezeiungen oder Prognosen aufstellen. Womit wohl mit hinreichender Deutlichkeit gezeigt wäre, daß es in den "dürren Gefilden" der Logik keinesfalls an reizvollen Bildern fehlt, um eine bedeutsame Problematik aufzuzeigen: Der existenziell patinisierte Vorwahn müsse schon bei den elementaren Fragestellungen ein "unheimliches Ballett blutleerer Kategorien"⁹⁵⁾ zitieren, steht gewiß auf schwachen Beinen ...

3.12 Doch versuchen wir die logische Analyse des Prophezeiungsproblems. Die Situation spiegelt sich in sechs Aussagen: $A_1, A_2, A_3, A_1^n, A_2^n, A_3^n$, wobei A_i ($1 \leq i \leq 3$) bedeutet, das i -te Kästchen sei gefüllt, A_i^n bedeutet, es sei leer. Die Schar der Freier hat nun durch Versuch hinreichend bewiesen, daß in diesem endlichen Aussagenbereich folgende Implikationen gelten:

$$A_i \rightarrow A_j^n$$

$$A_i^n \rightarrow A_j \quad (\text{für jedes Paar } i, j \text{ verschiedener der Zahlen } 1, 2, 3)$$

Selbstverständlich ist zusätzlich jeweils die reflexive Relation gültig:

$$A_i \rightarrow A_i$$

$$A_i^n \rightarrow A_i^n$$

Daraus folgt nun unmittelbar durch Spezialisierung:

$$A_1 \rightarrow A_2^n, \quad A_2^n \rightarrow A_3.$$

⁹⁵⁾ FISCHL, Johann: Logik; Graz 1952, p.152

Hieraus kann nun aber nicht, wie üblich aufgrund der Transitivität der Implikationsrelation, auf $A_1 \rightarrow A_3$ geschlossen werden: Nachweislich gilt ja die Implikation $A_1 \rightarrow A_3^n$.

So ist also keine der Implikationen zu widerlegen, weil es effektiv nicht möglich ist, alle drei Kästchen gleichzeitig zu öffnen. Die Eigenschaft der Transitivität ist also keineswegs so eng mit dem Implikationsbegriff verbunden, daß es sinnlos wäre, nicht auch eine nicht-transitive Beziehung "Implikation" zu nennen. Seit den Tagen der Megariker und Stoiker krächzen die Raben des KALIMACHOS, welche Implikation die richtige sei: Auch im 20. Jahrhundert bekommt ihr Gekrächze laufend neue "Nahrung" ...

3.13 Für die Situation des logischen Schließens in der SPECKERschen Prophezeiungsfabel muß also folgendes einschränkende Prinzip formuliert werden:

Soll der Schluß von den Implikationen $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ auf die Implikation $A \rightarrow C$ gültig sein, müssen die Aussagen A, B, C alle drei s i m u l t a n nachprüfbar (entscheidbar) sein⁹⁶⁾.

Die Limitation, die in diesem Prinzip ausgedrückt wird, ist dabei ganz im o p e r a t i v e n S i n n deutbar: Die Aussagen A_1 und A_3 können nicht gleichzeitig aus einem Experiment gewonnen werden, also auch nicht gemeinsam niedergeschrieben werden. Diese starke Restriktion der operativen Möglichkeiten spiegelt sich in oben formulierten Satz, der ein p r o t o - l o g i s c h e s Prinzip im Sinne LORENZENs ausdrückt: Weiter unten werden wir zeigen, daß im Komplementaritätsprinzip der Quantenmechanik die analoge Situation vorliegt. Ausschließlich diese Tatsache rechtfertigt im Rahmen einer operativen Untersuchung die Formulierung einer speziellen Quantenlogik.

3.2 QUANTENMECHANISCHE EIGENSCHAFTEN UND THEORIE DES HILBERT-RAUMES.

⁹⁶⁾Die Implikation $A \rightarrow B$ wird hier natürlich so aufgefaßt, daß A und B zusammen nachprüfbar sind. In der vorliegenden Situation heißt " $A \rightarrow B$ ": Wenn die Nachprüfung A ergeben hat, dann wird auch B bei geeigneter Nachprüfung als zutreffend vorgefunden.

3.21 Eigenschaften von quantenmechanischen Systemen können durch die Meßwerte von *O b s e r v a b l e n* angegeben werden. Die Quantenmechanik operiert mit Observablen, die sie als wohldefinierte (ideelle) Meßanordnungen festlegt, die beliebige reelle Zahlen als Meßwerte liefern. Zwei Meßanordnungen werden dabei als gleich betrachtet, wenn ihre Anordnung auf das betrachtete System immer zu denselben Meßergebnissen führt. Durch drei Bedingungen wird der Begriff der Meßanordnung im operativen Sinne hinreichend klar festgelegt:

- (1) Man gibt eine Vorschrift über den genauen Aufbau der mehr oder weniger komplexen Meßapparatur.
- (2) Man schreibt den Zeitpunkt ihrer Anwendung vor.
- (3) Man bestimmt das physikalische System, auf das die Meßapparatur angewendet werden soll⁹⁷⁾.

Observablen in diesem Sinne sind dann etwa Ortskoordinaten, Komponenten des Impulses oder Drehimpulses, usw.

3.22 Aufgrund der experimentellen Tatsachen wurde nun in der Quantenmechanik ein Grundpostulat formuliert, das zunächst wenig einsichtig erscheint:

Die Observablen $\mathcal{U}$ eines physikalischen Systems lassen sich eindeutig abbilden auf die HERMITESchen Operatoren P_A eines HILBERTschen Raumes, so daß einer Funktion $f(\mathcal{U})$ die Funktion $f(P_A)$ entspricht.

In der Sprache der Partikelvorstellung formuliert man diese eindeutige Abbildung auf die reellen meßbaren Funktionen des Phasenraumes.

In der Klassischen Mechanik kann jede durch ein Meßresultat begründete Aussage A über den Zustand eines Systems so formuliert werden, daß der den Zustand des Systems darstellende Punkt im Phasenraum sich innerhalb einer gewissen Punktmenge M_A des Phasenraumes befindet.

⁹⁷⁾ Dadurch wird festgelegt, daß eine Observable $\mathcal{U}$ von der Zeit abhängt bzw. von der Zeit unabhängig wird. Die Veränderung von $\mathcal{U}$ aufgrund verschiedener Zeitpunkte der Meßausführung nennt man in der Quantenmechanik "implizite Abhängigkeit von der Zeit".

3.23 Mittels des Begriffs des HILBERTschen Raums soll nun der grundlegende Begriff der "abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit" erklärt werden. Zunächst wieder eine ungefähre, intuitive Skizze der Gedanken der grundlegenden Arbeit "The logic of quantum mechanics" von BIRKHOFF & v. NEUMANN:

Eine Funktion $\psi(x)$ ordnet jedem Wert des Argumentes x eine beliebige reelle Zahl ψ zu. Man kann dieses ψ als einen Vektor auffassen, als Größe also, die durch Betrag und Richtung eindeutig charakterisiert ist. Dieser Vektor ist in einem Raum, der so viele Dimensionen besitzt, wie x Werte annehmen kann. Physikalische Zustände werden durch derartige Vektoren dargestellt.

Man kann nun ein G e m e n g e dadurch definieren, daß m linear unabhängige Vektoren (Zustandsvektoren) mit jeweils endlicher Wahrscheinlichkeit vorliegen. Jeder von diesen gegebenen Vektoren linear abhängige Vektor ist dann gleichermaßen in diesem Gemenge mit endlicher Wahrscheinlichkeit enthalten. Anders formuliert: m linear unabhängige Vektoren legen immer den ganzen von ihnen "aufgespannten" m -dimensionalen Unterraum fest.

Alle abgeschlossenen linearen Unterräume des Zustandsraumes eines physikalischen Systems sind dann m ö g l i c h e E i g e n s c h a f t e n dieses physikalischen Systems. Aussagen (qualities) über sie formulieren mögliche Prädikate physikalischer Systeme.

3.2301 Doch nun zur formalen Theorie des für die Quantenmechanik grundlegenden Begriffes des HILBERTschen Raums⁹⁸⁾: H sei ein HILBERT-Raum, der ein System von abzählbar unendlich vielen Elementen darstellt:

$$f_1, f_2, f_3, \dots, g_1, g_2, g_3, \dots, h_1, h_2, h_3, \dots$$

Dieses System H genüge nun folgenden Bedingungen:

⁹⁸⁾ Die folgende Darstellung kann in diesem Rahmen nur ein grober Aufriß sein, der mehr auf intuitive Durchsichtigkeit als auf Exaktheit Wert legt. Es sei auf die konstruktivistisch fundierten Theorien des HILBERTschen Raums bei LORENZEN(5) und HEYTING(3) hingewiesen. LUDWIG(1) bringt die Grundzüge des HILBERT-Raumes in axiomatischer Grundlegung.

3.231 Ist ein linearer Vektorraum; d.h. die linearen Operationen der Addition zweier Elemente von H $f_i + g_i$ und der Multiplikation $\alpha_i f_i$ mit beliebigen komplexen Zahlen α_i sind definiert. Für diese Operationen gelten die üblichen Rechenregeln der Vektoralgebra.

3.232 Von einer Teilmenge M von H spricht man als Linearmanigfaltigkeit genau dann, wenn mit f_i, g_i, h_i auch die jeweiligen Linearaggregate $\alpha_i f_i + \alpha_i g_i + \alpha_i h_i$ in M enthalten sind: Es handelt sich dann um die von M "aufgespannte" Linearmanigfaltigkeit $\{M\}$.

3.2321 Von einer abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit spricht man dann und nur dann, wenn sie mit einer unendlichen Folge von Elementen den Grenzwert f_{lim} enthält, falls die Folge einen Grenzwert f_{lim} besitzt. In diesem Fall wird durch M die Linearmanigfaltigkeit $[M]$ aufgespannt.

3.233 Mittels der durch 3.231 bis 3.2321 dargestellten Mengen lassen sich nun für die logische Untersuchung wesentliche Operationen definieren:

3.2331 Sind M_A und M_B abgeschlossene Linearmanigfaltigkeiten der Elemente f_i und g_i , so nennt man die Vereinigung aus M_A und M_B die Summe aller Elemente $\alpha_i f_i$ von M_A und aller Elemente $\alpha_i g_i$ von M_B zusammen mit ihren Häufungspunkten f_{lim} und g_{lim} :

$$\underline{D\ 3.2-1} \quad M_A \cup M_B =_{df} [M_A, M_B]$$

3.2332 Vom Durchschnitt der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten M_A und M_B spricht man genau dann, wenn die gebildete abgeschlossene Linearmanigfaltigkeit $M_A \cap M_B$ alle gemeinsamen Elemente der beiden Mengen enthält.

3.2333 Ist M_A Teilmenge von M_B , so bilden die Elemente von M_B die genau orthogonal zu allen Elementen von M_A sind, die abgeschlossene Linearmanigfaltigkeit $M_B - M_A$.

- 3.23331 Speziell spricht man von $H - M_A$ als von der zu M_A komplementären abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit.
- 3.2334 Besonders einfache abgeschlossene Linearmanigfaltigkeiten sind natürlich der HILBERT-Raum H selbst und die Nullmenge O .
- 3.234 Knüpfen wir nun an die Gedanken von BIRKHOFF & v. NEUMANN an, so können wir nun in unserer Terminologie den "Wirklichkeitsbezug" der Kalkülaussagen formulieren:
- 3.2341 A ist die Aussage, die genau in der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit M_A gilt⁹⁹⁾.
- 3.2342 $A \vee B$ ist die Aussage, die genau in der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit $M_A \cup M_B$ gilt.
- 3.2343 $A \wedge B$ ist die Aussage, die genau in der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit $M_A \cap M_B$ gilt.
- 3.2344 $A \rightarrow B$ ist die Aussage, die formuliert, daß M_A Teilmenge von M_B ist.
- 3.2345 $\neg A$ ist die Aussage, die genau in der zu M_A komplementären abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit $H - M_A$ gilt.
- 3.235 Die betrachteten abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten bzw. die linearen Unterräume (subsets of phase-space) BIRKHOFFs & v. NEUMANNs bilden, mathematisch gesehen, eine projektive Geometrie, wobei $A \wedge B$ die Operation des Schneidens, $A \vee B$ die Operation des Verbindens und $A \rightarrow B$ die Relation des Enthaltenseins ausdrückt. BIRKHOFF & v. NEUMANN erklärten diese projektive Geometrie zu einem mathematischen Verband (lattice) von bestimmten Eigenschaften. Für die Einordnung der Quantenmechanik in die Verbandstheorie hatte dies den Übergang von distributiven zu modular-

⁹⁹⁾ Die in den intuitiven Erläuterungen (3.23) verwendete Terminologie von BIRKHOFF & v. NEUMANN würde die Definition wie folgt formulieren: A ist die Aussage, die genau in einem linearen Unterraum M_A wahr ist.

ren Verbänden die Folge¹⁰⁰⁾.

3.236 Die in der obigen Betrachtung (3.235) ausgeklammerte Aussage $\neg A$ nimmt wieder eine Sonderstellung ein. Hatte die Negation schon im Rahmen der operativen Untersuchung eine wesentlich andere Rolle gespielt als in der fiktiven Logik, erfährt sie im Rahmen der Quantenlogik nochmals eine gewisse Bedeutungswandlung: Die Menge der Zustände, in denen $\neg A$ gilt ist nicht mehr die Komplementärmenge der Menge, in der A gilt, sondern nur ein auf ihr orthogonal stehender Unterraum. Diese Tatsache wird den Aufbau einer erweiterten fiktiven Quantenlogik rechtfertigen, die wie in der Logik von BIRKHOFF & v. NEUMANN das "tertium non datur" bzw. das "duplex negatio affirmat" gelten läßt.

3.237 Im Gegensatz zu allen anderen Operationen konnte außerdem $\neg A$ nur mittels des metrischen (nicht-linearen) Begriffs des Senkrechtstehens definiert werden: Bei der Bildung der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit $M_B - M_A$ (3.2333) war von Elementen die Rede, die auf anderen Elementen orthogonal (senkrecht) stehen. Mittels des metrischen Begriffs der Orthogonalprojektion läßt sich diese Operation jedoch exakt definieren:

3.2371 In einer abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit M_A kann ein beliebiges $f \in H$ ¹⁰¹⁾ auf genau eine Weise in die Summe $f = f_A + f_{\bar{A}}$ zerlegt werden, so daß $f_A \in M_A$ und $f_{\bar{A}} \in H - M_A$

¹⁰⁰⁾ Von einem Verband spricht man in der Mathematik, wenn für gewisse Elementmengen A, B, C die Operationen $\cap$ und $\cup$ definiert sind, die assoziativ, kommutativ und idempotent sind. Erfüllen diese Verknüpfungen außerdem das Distributivgesetz

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

nebst seinem dualen, durch Vertauschung von $\cap$ und $\cup$ entstandenen Pendant, so spricht man von einem distributiven Verband. Ein modularer Verband erfüllt dagegen das Distributivgesetz nicht, sondern nur das wesentlich schwächere DEDEKINDsche Modularaxiom:

$$(A \cap B) \cup (C \cap (A \cup B)) = ((A \cap B) \cup C) \cap (A \cup B)$$

Die hier verwendete Formulierung von JORDAN(3) zeigt durchsichtig die gleichfalls dualsymmetrische Beziehung des Gesetzes.

¹⁰¹⁾ Die verbandstheoretische Relation $A \leq B$ macht eine Menge von Elementen A, B, C zu einer Halbordnung, wenn gilt:

$$A \leq A$$

$$A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C$$

$$A \leq B, B \leq A \Rightarrow A = B$$

ist. f_A nennt man nun die Projektion von f in M_A , was symbolisch durch $P_A(f) = f_A$ ausgedrückt werden kann: Die Operation P_A ordnet jedem f aus H seine Orthogonalprojektion f_A in M_A zu. Damit ist P_A ein überall im HILBERTschen Raum wohldefinierter Projektionsoperator, der sich durch folgende Eigenschaften auszeichnet:

3.23711 P_A ist linear; d.h. es gilt: $P_A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 P_A f_1 + \alpha_2 P_A f_2$.

3.23712 P_A ist hermitisch ($P_A^* = P_A$).

3.23713 P_A ist idempotent ($P_A^2 = P_A$).

3.23714 M_A ist die Menge aller P_A -Werte, also die Menge aller $P_A(f)$.

3.23715 M_A kann auch durch die Menge der Lösungen von $P_A(f) = f$ charakterisiert werden. Die Menge aller Lösungen von $P_A(f) = 0$ ist $H - M_A$.

Dadurch kann man dem Projektionsoperator P_A die beiden Eigenwerte 0 und 1 zuordnen: Der Eigenwert 1 kennzeichnet die Situation $f \in M_A$, der Eigenwert 0 die Situation $f \in H - M_A$ ¹⁰²⁾.

3.24 Aufgrund der vorangegangenen Darstellung kann nun der intuitiv erläuterte Begriff der "Eigenschaft eines physikalischen Systems" präzisiert werden:

Die (experimentell verifizierbare) Eigenschaft E_A liegt im System $\mathcal{X}$ genau dann vor, wenn der Zustand f des Systems in der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit M_A liegt, also genau dann, wenn $P_A(f) = f$ gilt.

Die explizite Gestalt der Aussage A lautet also:

D 3.2-2 $A \stackrel{\text{def}}{=} P_A(f) = f$

¹⁰²⁾ Diese markantesten Eigenschaften der Projektionsoperatoren sind aus der Darstellung bei MITTELSTAEDT(1), p.376 übernommen. Weitere wichtige Sätze über diese Operatoren finden sich an gleicher Stelle und bei LUDWIG(1). Innerhalb unserer Untersuchungen soll aber zur Illustration der Zusammenhänge vor allem die Darstellung mit abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten Verwendung finden.

3.241 Verschiedene Eigenschaften E_A, E_B, E_C sind dann am gleichen physikalischen System simultan meßbar, wenn die zugeordneten Projektionsoperatoren miteinander vertauschbar sind. Die Logik derartiger Eigenschaften E_A, E_B, E_C , die in den Aussagen A, B, C ausgedrückt werden, nennt man die Logik der k o m m e n s u r a b l e n E i g e n s c h a f t e n .

Für abgeschlossene Linearmanigfaltigkeiten kann man formulieren:

3.242 Zwei Eigenschaften E_A und E_B , für die

$$M_A = (M_A \cap M_B) \cup (M_A \cap (H - M_B)) \text{ bzw.}$$

$$M_B = (M_B \cap M_A) \cup (M_B \cap (H - M_A))$$

erfüllt ist, sind als kommensurabel definiert¹⁰³⁾.

3.3 PHYSIKALISCHE MESSAUSSAGEN ALS KALKÜLAUSSAGEN

3.31 Im vorausgehenden Teilkapitel wurden abgeschlossene Linearmanigfaltigkeiten M_A, M_B, M_C bzw. Projektionsoperatoren P_A, P_B, P_C ein-eindeutig auf Kalkülaussagen A, B, C abgebildet. In übersichtlicher Form sei diese Zuordnung nochmals zusammengestellt, wobei der nicht vollständig ausgeführte Vergleich mit zusammengesetzten Projektionsoperatoren ergänzt werden soll. Explizite Ableitungen mit Operatoren finden sich zahlreich in den "Untersuchungen zur Quantenlogik" MITTELSTAEDTs. Für die vorliegende Untersuchung dient vor allem die Darstellung mit abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten die heuristische Stütze. Sie bildet auch den unmittelbaren Zugang zum Formalismus von BIRKHOFF & v. NEUMANN.

¹⁰³⁾ Die Äquivalenz der beiden Formulierungen 3.241 und 3.242 zeigt folgende Überlegung: Die abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten $M_A \cap M_B$ und $M_A \cap (H - M_B)$ liegen zueinander orthogonal. Jedes Element aus M_A läßt sich eindeutig darstellen als Summe des Elements aus $M_A \cap M_B \leq M_B$ und $M_A \cap (H - M_B) \leq (H - M_B)$. In A Operatorschreibweise: $P_A(f) = P_B(P_A(f) + (1 - P_B)P_A(f))$. Dabei ist $P_B P_A f$ gleichfalls Element aus M_B : $P_B P_A f = P_A P_B(P_A f)$. Hieraus folgt wiederum $P_B P_A = P_A P_B$, also $P_A P_B = P_B P_A$. Damit ist die Vertauschbarkeit von P_A und P_B gezeigt. Umgekehrt folgt aber aus der Vertauschbarkeit von P_A und P_B $M_A = (M_A \cap M_B) \cup (M_A \cap (H - M_B))$ aus $P_A = P_B P_A + (1 - P_B)P_A$.

Kalkülaussage	abgeschlossene Linearmanigfaltigkeit im HILBERT-Raum	Projektionsoperator im HILBERT-Raum
---------------	--	--

A	M_A	P_A
$\neg A$	$H - M_A$	$1 - P_A$
$A \wedge B$	$M_A \cap M_B$	$P_A P_B$
$A \vee B$	$M_A \cup M_B$	$P_A + P_B - P_A P_B$
$A \rightarrow B$	$M_A \leq M_B$	$P_A = P_A P_B$

3.32 Die Aussagen A, B, C wurden als simultan meßbar im physikalischen System S definiert. Ihre Logik wurde als Logik der kommensurablen Eigenschaften benannt: Die Aussagen sämtlicher klassischen formalen Modelle der Physik stellen sich als gewichtiger Spezialfall der Theorie kommensurabler Eigenschaften heraus. Insbesondere gehören hierher die Meßaussagen der Klassischen Mechanik, aber vor allem auch die kommensurablen Meßaussagen der Quantenmechanik, die auf Kalkülaussagen abgebildet werden. Die Logik ihres Kalküls ist die effektive Logik beliebiger Kalküle.

3.33 Betrachten wir nun einen Formalismus, der aus einigen Meßaussagen über den Zustand f eines zu untersuchenden quantenmechanischen Systems $\mathcal{S}$ und den im HILBERT-Raum geltenden Relationen $A \rightarrow B$ besteht. Die Relation " $\rightarrow$ " ist dabei physikalisch zu deuten: Wenn eine Messung das Ergebnis A liefert, wird bei geeigneter Messung auch das Ergebnis B geliefert. Formal betrachtet hat sie genau den operativen Sinn des logischen Schließens¹⁰⁴⁾. Klammert man die Bedeutung der Relationen aus, kann man von einem quantenmechanischen Kalkül K_Q sprechen, dessen Kalkülanfänge die erwähnten Meßaussagen und dessen Regeln die Relationen $A \rightarrow B$ des HILBERT-Raumes sind.

Dann sind die Kalkülaussagen A, B, C der expliziten Gestalt

¹⁰⁴⁾ Verbandstheoretisch betrachtet bilden A, B, C eine Halbordnung bezüglich der Relation " $\rightarrow$ " (vergl. Fußnote 101).

$P_A(f)=f$, $P_B(f)=f$, $P_C(f)=f$ sowohl jederzeit simultan in $\mathcal{X}$ meßbar als auch im Formalismus der Quantenmechanik theoretisch ableitbar. Sie geben also eine exakte, vollständige Information über den Ausgang jeder Messung, die der Feststellung kommensurabler Eigenschaften dient: Die Ergebnisse des Meßprozesses sind ein-eindeutig abbildbar auf die im Kalkül K_Q abgeleiteten Aussagen:

"Die Frage, ob für die Meßergebnisse A,B,C die effektive Logik gilt oder nicht, ist durch diese Zuordnung auf das Problem zurückgeführt, ob die effektive Logik für die Aussagen eines Kalküls gilt."¹⁰⁵⁾

3.331 Die Tatsache dieser Gültigkeit hat LORENZEN durch seine operative Begründung der Logik bestätigt. Aufgrund spezieller Eigenschaften des theoretischen Modells gilt für die Aussagen der Physik sogar die um das "tertium non datur" erweiterte effektive Logik, also die fiktive Logik (klassische Aussagenlogik und niedere Prädikatenlogik). Dies gilt vor allem für die kommensurablen Meßaussagen der Quantenmechanik, die unter Kapitel 3.2 abgehandelt wurden. Wie schon angedeutet (3.236), hängt dies mit der spezifischen Negationseinführung zusammen: Während A genau in der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit M_A gilt, ist die Gültigkeit von $\neg A$ nur in der auf M_A total-senkrechten abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit definiert. M_A und $H - M_A$ sind also keine vollständigen Komplementmengen in dem Sinne, daß sie als Vereinigungsmenge die Gesamtmenge H des HILBERTschen Raums ergeben. Daher hat der "tertium non datur" in der BIRKHOFF-v.NEUMANNschen "Quantenlogik" Gültigkeit.

3.34 Es ist nun aber ein empirisches Faktum der Quantenmechanik, daß die Meßaussagen der Kommensurabilitätsforderung im allgemeinen nicht genügen: Bei Messung kommensurabler Eigenschaften kann man, wie gezeigt, den Ausgang des Experiments im Formalismus der Theorie vorausberechnen. Das markanteste Beispiel, vielzitiertes Kronzeug eines "Indeterminismus im

¹⁰⁵⁾ MITTELSTAEDT(1), p.340

atomaren Geschehen", soll zeigen, daß dies nicht immer der Fall sein muß:

Es sei E_q die Eigenschaft, daß ein System $\mathcal{S}$ die Ortskoordinaten q habe. E_p besage dagegen, daß $\mathcal{S}$ den Impuls q habe. $\mathcal{S}$, das die Eigenschaft E_p hat, kann nun die Eigenschaft E_q weder im positiven noch im negativen Sinne zukommen: Jede folgende Messung des Ortes verändert nämlich das Impulsmoment des Systems derart, daß nach Abschluß des Experiments die Kenntnis der Bewegung von $\mathcal{S}$ durch die HEISENBERG'schen Ungenauigkeitsrelationen bestimmt ist. Der Meßprozeß verändert den Zustand f des Systems in einen neuen Zustand f' . In diesem f' kann nun aber E_q so gemessen werden, daß keine Veränderung des Systems mehr eintritt:

Die Eigenschaften E_p und E_q sind nur in verschiedenen Systemzuständen f_p und f_q meßbar. Ein simultaner Bezug auf das System ist für E_p und E_q nicht mehr möglich: Die Messung der einen Eigenschaft kann das Vorhandensein der anderen zerstören. In diesem Fall spricht man von *i n k o m m e n s u r a b l e n E i g e n s c h a f t e n*.

3.341 In der Quantenmechanik der allgemeinen inkommensurablen komplementären Eigenschaften versagt die umkehrbar eindeutige Abbildung der Meßaussagen auf die ableitbaren Aussagen des Modellformalismus. Nur dem *n u n b e o b a c h t e t e n* System kann der Formalismus der Theorie zugeordnet werden¹⁰⁶⁾. Über den effektiven Ausgang von Messungen kann die Theorie keine Aussagen machen: Man kann höchstens die Statistik über eine große Anzahl von Aussagen mit den statistischen Aussagen der Theorie über den Ausgang von Messungen vergleichen. Für diesen Fall gilt wieder die effektive Logik, wobei jedoch die Zuordnung einzelner Meßaussagen zu Kalkülaussagen nicht mehr möglich ist.

3.342 Wir haben gezeigt, daß der Meßprozeß ein quantenmechanisch-

¹⁰⁶⁾ Die erkenntnistheoretische Problematik einer derartigen Zuordnung führt zur Diskussion des Phänomenalismus. Vergl. vor allem REICHENBACH(1) und STEGMÜLLER(4).

sches System $\mathcal{S}$ derartig stören kann, daß es von einem Zustand f in einen anderen Zustand f' eintritt. Innerhalb dieser separaten Zustände kann jedoch die Kommensurabilität von Eigenschaften gewahrt bleiben. Diese spezielle Situation kann man dadurch ausdrücken, daß man nicht mehr einen einzelnen Kalkül in Betracht zieht, sondern eine ganze Schar von Kalkülen $K_Q^1, K_Q^2, K_Q^3, \dots, K_Q^n$. Es gilt dann, die Frage nach der Logik allgemeiner inkommensurabler Eigenschaften zu stellen.

Wie für den Einzelkalkül K_Q gilt für das Kalkülsystem $K_Q^1, \dots, K_Q^n$, daß innerhalb des einzelnen Kalküls verschiedene Meßaussagen über die Zustände f, f', f'' des quantenmechanischen Systems die Kalkülanfänge bilden. Das Regelsystem bilden die im HILBERT-Raum gültigen Relationen. Da diese Regeln aber für jeden Kalkül die gleichen sind, kann man die Schar der Kalküle in gewisser Hinsicht unter einem Aspekt betrachten: Man nennt diesen Formalismus dann einen *Q u a s i k a l k ü l*. Mit einem echten Kalkül verglichen, wird er natürlich gewisse Restriktionen für das schematische Operieren enthalten: Die Aussagen eines Quasikalküls stehen ja nicht für tatsächliche, sondern für *m ö g l i c h e* Meßaussagen.

3.343 Für nur mögliche Meßaussagen muß aber nun im operativen Rahmen die Frage gestellt werden, ob sie effektiv gemessen werden können oder nicht. Neben der quantenmechanischen Theorie selbst ist hier vor allem der Satz der Meßprozeßtheorie von Relevanz, daß zwei Eigenschaften eines System dann und nur dann simultan gemessen werden können, wenn sie explizit als kommensurabel gekennzeichnet sind.

Für den Quasikalkül allgemeiner inkommensurabler Eigenschaften, die in komplementären Meßaussagen formuliert werden, muß daher ein einschränkendes Prinzip gefordert werden, das *K o m p l e m e n t a r i t ä t s p r i n z i p* ¹⁰⁷⁾:

In einer Ableitung des Sequenzenkalküls dürfen zwei Aussagen A und B dann und nur dann als Kalkülanfang $S(A) \rightarrow A$ und $S(B) \rightarrow B$ erscheinen, wenn explizit auf ihre Kommensurabilität hingewiesen wurde.

¹⁰⁷⁾ Die vorliegende Formulierung des Prinzips ist für den Sequenzenkalkül abgefaßt. In der gewöhnlichen Schreibweise einer Kalkülableitung muß für A und B die Kommensurabilität gefordert werden, wenn eine bestimmte Zeile der Ableitung ausschließlich A oder ausschließlich B enthält.

3.3431 Die Frage nach der Logik der allgemeinen inkommensurablen Eigenschaften, die wir als *e f f e k t i v e Q u a n t e n l o g i k* bezeichnen wollen, kann nun präzise gestellt werden: Welche Regeln der effektiven Logik der Kalküle sind so allgemein formuliert, daß sie auch noch gelten, wenn das Komplementaritätsprinzip gefordert wird? Die gleiche Frage kann natürlich für die um das "tertium non datur" bzw. "duplex negatio affirmat" erweiterte klassische Logik gestellt werden. Die auf diese Weise erweiterte effektive Quantenlogik, soll dann *f i k t i v e Q u a n t e n l o g i k* heißen. Die Regeln der allgemeinen operativen Logik müssen also daraufhin untersucht werden, ob für ihre Allgemeingültigkeit explizit die Kommensurabilität der Aussagen A, B, C gefordert werden muß.

3.3432 Das Komplementaritätsprinzip drückt eine analoge Situation aus, wie wir sie in der SPECKERSchen Prophezeiungsfabel kennengelernt haben (3.13). MITTELSTAEDT kommentiert die operative Restriktion des Prinzips:

"Diese Forderung besagt also, daß die Inkommensurabilität zweier Aussagen A und B hier ganz im operativen Sinne zu deuten ist: Man kann sie nicht aus einem Experiment gleichzeitig gewinnen und somit auch nicht gemeinsam aufschreiben. Das Komplementaritätsprinzip drückt daher eine starke Einschränkung der operativen Möglichkeiten aus."¹⁰⁸⁾

Im Sinne der operativen Logik ist also das Komplementaritätsprinzip ein *p r o t o l o g i s c h e s* Prinzip: Es drückt die Limitation der operativen Verwendung physikalischer Meßausagen aus.

3.35 Wie in der Logik kommensurabler Eigenschaften können auch in der Logik der inkommensurablen Eigenschaften (Quantenlogik), A und B , denen Untermengen M_A und M_B des HILBERT-Raums entsprechen, neue Eigenschaften $A \wedge B$, $A \vee B$ und $\neg A$ definieren. Auch im Formalismus des Quasikalküls lassen sich Eigenschaften des quantenmechanischen Systems mit abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten identifizieren.

¹⁰⁸⁾ MITTELSTAEDT(1), p.342

3.36 Der bedeutende strukturelle Wandel der effektiven Quantenlogik gegenüber der effektiven Logik der Kalküle erklärt sich durch die Einschränkung der Operationsmöglichkeiten durch das Komplementaritätsprinzip. Eine durchsichtige Erläuterung des Strukturwandels soll das KLEENESche Axiomensystem für die Aussagenlogik bieten, das er in seiner "Introduction to metamathematics" verwendet. Durch die stattliche Anzahl von zehn Axiomen plus der Regel des modus ponens enthält der Aussagenkalkül KLEENES den effektiven Kalkül als Teilkalkül, falls Axiom 10 abgeschwächt wird. Alle logischen Verknüpfungszeichen sind als undefinierte Grundbegriffe eingeführt. Wir betrachten den Systemformalismus als syntaktisches Gebilde, das *h e u r i s t i s c h* die strukturelle Differenz der effektiven und fiktiven "Aussagenlogik" (Junktorenlogik), der effektiven und fiktiven Quantenlogik verdeutlicht.

3.361 Der KLEENESche Aussagenkalkül mit den Einschränkungen und Verwerfungen für die verschiedenen "Teilkalküle" bietet dann folgendes Bild:

A 3.3-1 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A 3.3-1 ist ungültig für das System der effektiven und fiktiven Quantenlogik

A 3.3-2 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A 3.3-3 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

A 3.3-4 $\vdash A \wedge B \rightarrow A$

A 3.3-5 $\vdash A \wedge B \rightarrow B$

A 3.3-6 $\vdash A \rightarrow A \vee B$

A 3.3-7 $\vdash B \rightarrow A \vee B$

A 3.3-8 $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

A 3.3-9 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$

A 3.3-10 $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$

A 3.3-10 ist ungültig für das System der effektiven Logik und der effektiven Quantenlogik

A 3.3-10_{eff} $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

3.362 Der ungemein bedeutsame Unterschied zwischen effektiver und fiktiver Logik spiegelt sich in diesem objektsprachlichen System also in der Ungültigkeit eines einzigen Axioms für den Aufbau

der effektiven Logik: A 3.3-10 muß durch das abgeschwächte $A\ 3.3-10_{\text{eff}}$ ersetzt werden.

Die wesentlichen Unterschiede in der semantischen Konzeption, die im 2. Kapitel erläutert wurden, kommen in dieser rein syntaktischen Betrachtung natürlich nicht zum Ausdruck.

Eine analoge Situation liegt für die Quantenlogik vor: Die fiktive Quantenlogik verwirft aufgrund des Komplementaritätsprinzips A 3.3-1. Die effektive Quantenlogik verwirft das gleiche Axiom und schwächt A 3.3-10 zu $A\ 3.3-10_{\text{eff}}$ ab.

3.363 Da jedoch bedeutende Regeln der Junktorenlogik (Theoreme der Aussagenlogik) nur mittels A 3.3-1 und $A\ 3.3-10$ abgeleitet werden können, ist die Quantenlogik, speziell die effektive Quantenlogik, wesentlich ausdrucksärmer in ihren Aussagen als die effektive Junktorenlogik oder gar die fiktive (klassische) Aussagenlogik.

3.364 Die Verwerfung von A 3.3-1 durch die (effektive und fiktive) Quantenlogik illustriert wieder am einsichtigsten unser "klassisches" Beispiel (3.34):

A mache über ein quantenmechanisches System $\mathcal{S}$ die Aussage, daß es den Ort $q = q_0$ einnehme, während B besage, daß $\mathcal{S}$ den Impuls $p = p_0$ habe. Dann wird in A 3.3-1 folgendes behauptet: Weist man experimentell durch Messung die Gültigkeit von A nach ($p = p_0$), dann folgt daraus: Falls B durch Messung als zutreffend bestätigt wird ($q = q_0$), dann wird die Messung auch A ($p = p_0$) als zutreffend erweisen.

Wie bereits ausführlich diskutiert, ist dies in der Quantenmechanik im allgemeinen Fall keineswegs gewährleistet: A 3.3-1 ist dann und nur dann gültig, wenn explizit auf die Kommensurabilität von A und B hingewiesen wird, also nicht mehr allgemeingültig im festgelegten Sinn (3.3431).

3.4 DIE STELLUNG DER QUANTENLOGIK INNERHALB DER FORMALEN LOGIK

3.41 In Kapitel 2.5 haben wir einen effektiven Sequenzenkalkül mit semantischer Deutung aufgebaut. Er ist vom operativen

Standpunkt aus gesehen als grundlegend zu betrachten. In unseren Untersuchungen, in welchem Maße physikalische Meßaussagen als Kalkülaussagen verwendet werden können, fand die fiktive Logik jedoch gebührende Beachtung: So konnte gerade für die kommensurablen Meßaussagen der Quantenmechanik die Gültigkeit der fiktiven Logik nachgewiesen werden. Und aufgrund spezieller Modelleigenschaften im Formalismus von BIRKHOFF & v. NEUMANN gilt dort die fiktive Quantenlogik, also das tertium non datur. Wie gezeigt wurde, hängt dies mit der Definition der komplementären Menge im HILBERT-Raum eng zusammen.

- 3.42 Es läßt sich somit wohl rechtfertigen, daß abschließend ein allgemeiner Sequenzenkalkül als syntaktisches System formuliert wird, der - bei entsprechender Deutung - alle Fälle der effektiven und fiktiven Logik umfaßt. LORENZEN konnte im Rahmen seiner operativen Logik nachweisen, daß, falls A oder $\neg A$ fiktiv ableitbar sind, der jeweilig "komplementäre" Ausdruck $n i c h t$ fiktiv ableitbar, also in keinem Falle effektiv ableitbar, ist:

"Daher gewinnt man auch in diesen Fällen, in denen man aus der fiktiven Ableitbarkeit keine relevante effektive Ableitbarkeitsaussage erhält, doch stets eine effektive Unableitbarkeit."¹⁰⁹⁾

Womit die Verwendung der fiktiven Logik im operativen Rahmen durchaus gerechtfertigt ist, wenn auch als grundlegendstes Phänomen - ganz im Sinne des Intuitionismus - die effektive Ableitung interessiert.

- 3.43 Es soll im folgenden ein formales System in Sequenzenformulierung aufgebaut werden, das die klassische Logik (Aussagenlogik und niedere Prädikatenlogik) umfaßt und das die Kalküle für die effektive (intuitionistische) Logik, die effektive und fiktive Quantenlogik als Teilkalküle enthält. In der jeweiligen semantischen Interpretation werden die Aussagen der effektiven Logik der Kalküle (intuitionistische Logik) und die effektive Quantenlogik (effektive Logik der inkommensurablen Eigenschaf-

¹⁰⁹⁾ LORENZEN(5), p.84

ten) als beweisdefinit, die Aussagen der klassischen Logik und der fiktiven Quantenlogik als wahrheitsdefinit festgelegt.

3.431 Zulässige Ausdrücke im allgemeinen Sequenzenkalkül sind die Aussagen $A, B, C, D, \dots, A(x), B(x), \dots$ und endliche Folgen (Systeme) von Aussagen $S_1, S_2, S_3, \dots$. Diese S_i können natürlich auch leer sein.

3.432 Als Kalkülanfang dient das Schema einer einzigen Sequenz:

$$\text{KA 3.4-1} \quad S(E) \rightarrow E$$

3.433 Folgende aufgeführte Schlußregeln für die Junktoren- und Quantorenlogik mit den entsprechenden Restriktionen gelten R 3.4-1 bis R 3.4 - 14. Da es sich um ein syntaktisches System handelt, das sowohl effektive als auch fiktive Logik umfaßt, soll statt der für die effektive Logik verwendete Bezeichnung "Proponentenregel" oder "Opponentenregel" die allgemeinere Bezeichnung "Antezedensregel" oder "Sukzedensregel" angewandt werden. Der Unterschied zwischen den einzelnen Systemen ergibt sich im formalen Bereich ausschließlich aufgrund der Einschränkungen der Regeln.

3.4331 Konjunktionsregeln:

3.43311 Sukzedensregel der Konjunktion

$$\text{R 3.4-1} \quad (\rightarrow \wedge) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, A \quad , \quad S_1 \rightarrow S_2, B}{S_1 \rightarrow S_2, A \wedge B}$$

3.43312 Antezedensregeln der Konjunktion

$$\text{R 3.4-2} \quad (\wedge \rightarrow_1) \quad \frac{A, S_1 \rightarrow S_2}{A \wedge B, S_1 \rightarrow S_2}$$

$$\text{R 3.4-3} \quad (\wedge \rightarrow_2) \quad \frac{B, S_1 \rightarrow S_2}{A \wedge B, S_1 \rightarrow S_2}$$

3.4332 Adjunktionsregeln:

3.43321 Sukzedensregeln der Adjunktion

$$\text{R 3.4-4} \quad (\rightarrow \vee_1) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, A}{S_1 \rightarrow S_2, A \vee B}$$

$$\text{R 3.4-5} \quad (\rightarrow \vee_2) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, B}{S_1 \rightarrow S_2, A \vee B}$$

3.43322 Antezedensregel der Adjunktion

$$\text{R 3.4-6} \quad (\vee \rightarrow) \quad \frac{A, S_1 \rightarrow S_2, \quad B, S_1 \rightarrow S_2}{A \vee B, S_1 \rightarrow S_2}$$

3.4333 Subjunktionsregeln:

3.43331 Sukzedensregel der Subjunktion

$$\text{R 3.4-7} \quad (\rightarrow \rightarrow) \quad \frac{A, S_1 \rightarrow S_2, B}{S_1 \rightarrow S_2, A \rightarrow B}$$

Für das System der effektiven und fiktiven Quantenlogik darf B in S_1 weder als Primformel noch in der konjunktiven Verknüpfung $A \wedge B$ auftreten!

3.43332 Antezedensregel der Subjunktion

$$\text{R 3.4-8} \quad (\rightarrow \rightarrow) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, A, \quad B, S_3 \rightarrow S_4}{A \rightarrow B, S_1, S_3 \rightarrow S_2, S_4}$$

3.4334 Negationsregeln:

3.43341 Sukzedensregel der Negation

$$\text{R 3.4-9} \quad (\rightarrow \neg) \quad \frac{A, S_1 \rightarrow S_2}{S_1 \rightarrow S_2, \neg A}$$

Für das System der effektiven Logik und der effektiven Quantenlogik muß S_2 leer sein!

3.43342 Antezedensregel der Negation

$$\text{R 3.4-10} \quad (\neg \rightarrow) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, A}{\neg A, S_1 \rightarrow S_2}$$

3.4335 Generalisationsregeln:

3.43351 Sukzedensregel der Generalisation

$$\text{R 3.4-11} \quad (\rightarrow A) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, A(y)}{S_1 \rightarrow S_2, A_x(x)}$$

3.43352 Antezedensregel der Generalisation

$$\text{R 3.4-12 } (A \rightarrow) \quad \frac{A(y), S_1 \rightarrow S_2}{A_x A(x), S_1 \rightarrow S_2}$$

Variabilitätsbedingung: y darf in S_1 und S_2 nicht frei vorkommen.

3.4336 Partikularisationsregeln:

3.43361 Sukzedensregel für die Partikularisation

$$\text{R 3.4-13 } (\rightarrow V) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2, A(y)}{S_1 \rightarrow S_2, V_x A(x)}$$

3.43362 Antezedensregel für die Partikularisation

$$\text{R 3.4-14 } (V \rightarrow) \quad \frac{A(y), S_1 \rightarrow S_2}{V_x A(x), S_1 \rightarrow S_2}$$

Variabilitätsbedingung: y darf in S_1 und S_2 nicht frei vorkommen.

3.434 In den Ableitungen des Sequenzenkalküls können folgende S t r u k t u r r e g e l n beim logischen Schließen Anwendung finden:

3.4341 Verdünnungsregeln:

3.43411 Verdünnungsregel für das Sukzedens

$$\text{R 3.4-15 } (\rightarrow \text{ Verd}) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2}{S_1 \rightarrow S_2, D} \quad 110)$$

Für das System der effektiven Logik und der effektiven Quantenlogik muß S_2 leer sein!

3.4312 Verdünnungsregel für das Antezedens

$$\text{R 3.4-16 } (\text{Verd } \rightarrow) \quad \frac{S_1 \rightarrow S_2}{D, S_1 \rightarrow S_2}$$

110) Zur Unterscheidung der Strukturregeln von den Einführungsregeln für Junktoren und Quantoren soll ein Doppelstrich den Übergang zwischen den Sequenzen andeuten.

3.4342 Regeln der Zusammenziehung:

3.43421 Regel der Zusammenziehung für das Sukzedens

$$\begin{array}{c} \text{R 3.4-17} \quad (\rightarrow \text{Zus}) \quad \frac{S_1 \rightarrow_s S_2, D, D}{S_1 \rightarrow_s S_2, D} \end{array}$$

3.4322 Regel der Zusammenziehung für das Antezedens

$$\begin{array}{c} \text{R 3.4-18} \quad (\text{Zus} \rightarrow) \quad \frac{D, D, S_1 \rightarrow_s S_2}{D, S_1 \rightarrow_s S_2} \end{array}$$

3.4343 Vertauschungsregeln:

3.43431 Vertauschungsregel für das Sukzedens

$$\begin{array}{c} \text{R 3.4-19} \quad (\rightarrow \text{Vert}) \quad \frac{S_1 \rightarrow_s S_2, E, D, S_3}{S_1 \rightarrow_s S_2, D, E, S_3} \end{array}$$

3.43432 Vertauschungsregel für das Antezedens

$$\begin{array}{c} \text{R 3.4-20} \quad (\text{Vert} \rightarrow) \quad \frac{S_1, D, E, S_2 \rightarrow_s S_3}{S_1, E, D, S_2 \rightarrow_s S_3} \end{array}$$

3.4344 Schnittregel:

$$\begin{array}{c} \text{R 3.4-21} \quad (\text{Schnitt}) \quad \frac{S_1 \rightarrow_s S_2, D \quad ,, \quad D, S_3 \rightarrow_s S_4}{S_1, S_3 \rightarrow_s S_2, S_4} \end{array}$$

3.44 Beispiele:

3.441 Das KLEENEsche Axiom $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ (A 3.3-10) ist effektiv ungültig. Die Ableitung im Sequenzenkalkül zeigt, daß es nur klassisch gültig ist.

$$\begin{array}{c} A \rightarrow_s A \\ (\rightarrow \neg) \quad \frac{\rightarrow_s A, \neg A}{\neg\neg A \rightarrow_s A} \\ (\neg \rightarrow) \quad \frac{\neg\neg A \rightarrow_s A}{\rightarrow_s \neg\neg A \rightarrow A} \\ (\rightarrow \rightarrow) \quad \frac{\rightarrow_s \neg\neg A \rightarrow A}{\neg\neg A \rightarrow A} \\ \text{=====} \end{array}$$

Die Ableitung ist aufgrund der Restriktion von R 3.4-9 ($\rightarrow \neg$) effektiv ungültig: S_2 ist nicht leer ($S_2 = A$).

3.442 Die effektiv gültige Aussage $A \wedge B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ¹¹¹⁾ ist quantenlogisch ungültig:

	$A, B \rightarrow_s C, B, , , A, B \rightarrow_s C, A$
$(\rightarrow \wedge)$	<u>$A, B \rightarrow_s A \wedge B, C$</u>
$(\rightarrow \rightarrow)$	<u>$A \rightarrow_s A \wedge B, B \rightarrow C$</u>
$(\rightarrow \rightarrow), (\text{Verd} \rightarrow)$	<u>$\rightarrow_s A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B, , , B \rightarrow_s$</u>
$(\rightarrow \rightarrow)$	<u>$A \wedge B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$</u>
	=====

Diese Ableitung ist aufgrund der Restriktion in R 3.4-7 $(\rightarrow \rightarrow)$ im effektiven und fiktiven System der Quantenlogik ungültig, während sie effektiv gilt. ¹¹²⁾

3.5 ZUSAMMENFASSUNG ZUM 3. KAPITEL:

Eine Fabel mit logischem Gehalt, die in einer Abhandlung von SPECKER zitiert ist, zeigt in der Analyse die Bedeutung der gleichzeitigen Nachprüfbarkeit von Kalkülaussagen für das logische Schließen. Sie schafft einen intuitiven Zugang zur quantenlogischen Problematik: Zum größten Teil liefern quantenmechanische Systeme keine konsistenten Prognosen über künftige Systemzustände. Die formale Theorie des HILBERTschen Raumes gestattet die präzise Formulierung der "experimentell verifizierbaren Eigenschaft E_A eines physikalischen Systems $\mathcal{J}$ ": E_A ist genau dann vorhanden, wenn der Systemzustand f in der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeit M_A , einer Untermenge des HILBERT-Raumes, liegt. Auch die Kommensurabilität derartiger Eigenschaften kann durch diesen Formalismus exakt festgelegt werden. Die Logik der Meßaussagen von kommensurablen Eigenschaften ist die effek-

¹¹¹⁾ $X \rightarrow Y$ bedeutet in der operativen Logik: "Ist X ableitbar, dann ist auch Y ableitbar". Aus dieser Aussage geht durch Gleichsetzung von A und C das KLEENESche Axiom 1 (A 3.3-1) hervor (vergl. auch 3.364).

¹¹²⁾ Die unterstrichenen Aussagen in der 2. Zeile der Ableitung machen den Unterschied deutlich.

tive Logik der Kalküle. Im allgemeinen genügen jedoch die quantenmechanischen Meßaussagen nicht der Kommensurabilitätsforderung: Für die logische Untersuchung bedeutet dies die Betrachtung eines Quasikalküls, einer Schar von echten Kalkülen. Im Gegensatz zum Kalkül erfordert der Quasikalkül die Formulierung eines einschränkenden protologischen Prinzips: Das Komplementaritätsprinzip schwächt deshalb die Ausdrucksfähigkeit der allgemeinen Logik der inkommensurablen Eigenschaften, der Quantenlogik. Gewisse Modelleigenschaften gestatten es, für Meßaussagen der klassischen Theorien der Physik, ja selbst der Quantenmechanik, die klassische (fiktive) Logik anzuwenden. Die Stellung der effektiven und fiktiven Quantenlogik im Rahmen der formalen Logik kann durch das syntaktische System eines allgemeinen Sequenzenkalküls illustriert werden. Spezialisierung der Regeln läßt die verschiedenartigen Logiksysteme entstehen. Für unsere Untersuchung wird allerdings das System der effektiven Logik als das grundlegende betrachtet. Den semantischen Bezug liefert für die effektive Logik die Beweisdefinitheit, für die klassische Logik die Wahrheitsdefinitheit der Aussagen.

LITERATURVERZEICHNIS

ACKERMANN, Wilhelm:

siehe HILBERT & ACKERMANN(1).

BEAUREGARD, Olivier Costa de:

- (1) Extension d'une théorie de M. J.de NEUMANN au cas de projecteurs non commutables; CRAS, vol.221(1945), pp.230.231

BENGY-PUYVALLEE, Renaud de:

- (1) Sur les règles de composabilité dans les logiques de la complémentarité de Mme DESTOUCHES-FEVRIER; CRAS, vol.220 (1945), pp.589-591
- (2) La notion de composabilité en logique; Synthèse, vol.7 (1948/49), pp.201-205

BERGMANN, Gustav:

- (1) The logic of quanta; American journal of physics, vol.15 (1947), abgedruckt in: Phil.Sc., pp.475-508

BETH, E.W.:

- (1) Analyse sémantique des théories physiques; Synthèse, vol.5(1946/47), pp.206-207
- (2) The foundations of mathematics; Amsterdam 1959

BIRKHOFF, Garrett:

- (1) Lattices and their applications; Bulletin of the american mathematical society, vol.44(1938), pp.793-800
- (2) Lattice theorie; New York 1948

BIRKHOFF, Garrett & NEUMANN, John von:

- (1) The logic of quantum mechanics; Annals of mathematics, vol.37(1936), pp.823-843

BLOCHINZEW, D.I.:

- (1) Grundlagen der Quantenmechanik; Berlin 1953
- (2) Kritik der philosophischen Anschauungen der sog. Kopenhagener Schule in der Physik; Sowjetwissenschaft, Naturwissenschaftliche Abteilung, 1953, Heft 4, pp.545-573

BODIU, Georges:

- (1) Recherches sur les fondements du calcul quantique de probabilités dans les cas purs (Espace de HILBERT, principe d'ondulisation); Thèse de doct. ès sc.math., Paris 1949, abgedruckt in: Annales de physique (1950)

BRITZELMAYR, Wilhelm:

- (1) Interpretation von Kalkülen; Synthèse, vol.7(1948/49), pp.50-57

BROUWER, L.E.J.:

- (1) Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus; Proc.Akad.Wet. Amsterdam, vol.31(1926), pp.374-379
- (2) Mathematik, Wissenschaft und Sprache; Mh.Math.Phys., vol.36(1929), pp.153-164

CARNAP, Rudolf:

- (1) Der Raum; Erg.Heft 56 der Kantstudien, Berlin 1922
- (2) Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen; Wien 1954

CURRY, Haskell B.:

- (1) Philosophische Bemerkungen zu einigen Problemen der mathematischen Logik; Arch.Phil., vol.4(1951), pp.147-156
- (2) Leçons de **logique** algébrique; Paris und Louvain 1952
- (3) Outlines of a formalist philosophy of mathematics; Amsterdam 1952

DESTOUCHES, Jean-Louis:

- (1) Principes fondamentaux de physique théorique; Paris 1942
- (2) Quelques aspects théorétiques de la notion de complémentarité, D, vol.2(1948), pp.351-381
- (3) Physico-logical problems; Ax.Meth., pp.390-405

DESTOUCHES-FEVRIER, Paulette:

- (1) Les relations d'incertitude et la logique; CRAS, vol.204 (1937), pp.481-483
- (2) La structure des théories physiques; Paris 1954

FREY, Gerhard:

- (1) Subjektive und objektive Unbestimmtheit; Methodos 1952, pp.301-316

GENTZEN, Gerhard:

- (1) Untersuchungen über das logische Schließen; Mathematische Zeitschrift, vol.39(1934/35), pp.176-210, 405-431

GOODMAN, Nelson & QUINE, W.v.O.:

- (1) Steps toward a constructive nominalism; JSL, vol.12/3 (1947)

HEISENBERG, Werner:

- (1) Physikalische Prinzipien der Quantentheorie; Leipzig 1930
- (2) Kausalgesetz und Quantenmechanik; E, vol.2(1931), pp.172-183
- (3) Der Begriff "Abgeschlossene Theorie" in der modernen Naturwissenschaft; D, vol.2(1948)

HEMPEL, Carl G.:

- (1) Besprechung von REICHENBACH(1); JSL, vol.10(1945), pp.97-100

HERMES, Hans:

- (1) Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik; Leipzig 1939
- (2) Zur Axiomatisierung der Mechanik; Ax.Meth., pp.282-290
- (3) Einführung in die Verbandstheorie; Berlin 1955

HEYTING, Arend:

- (1) Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik; Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse, 1930, pp.42-56
- (2) Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie; Berlin 1934
- (3) Intuitionism, an introduction; Amsterdam 1956

HILBERT, David:

- (1) Axiomatisches Denken; Mathematische Annalen, vol.78(1918), pp.405-419

HILBERT, D. & ACKERMANN, W.:

- (1) Grundzüge der theoretischen Logik; Berlin 1949

JOOS, Georg:

- (1) Lehrbuch der theoretischen Physik; Leipzig 1954

JORDAN, Pascual:

- (1) Zur Quanten-Logik; Archiv d. Mathematik, vol.2(1949/50), pp.166-171
- (2) Zur Axiomatik der Quantenalgebra; Akad.d.Wiss.u.d.Lit., Abh.d.math.-naturwiss.Kl., Univ.Mainz, vol.5(1950)
- (3) Quantenlogik und das kommutative Gesetz; Ax.Meth., pp.365-375

KAILA, Eino:

- (1) Zur Metatheorie der Quantenmechanik; Helsinki 1950

KEMBLE, Edwin C.:

- (1) Reality, measurement, and the state of the system in quantum mechanics; Philosophy of science, vol.18(1951), pp.273-299

KLEENE, Stephen C.:

- (1) Introduction to metamathematics; Amsterdam 1952

KOLMOGOROFF, 'A.N.:

- (1) Über das tertium non datur; Rec.math. Soc. math., Moscou, vol.32 (1925)

LAUE, Max von:

- (1) Über HEISENBERGS Ungenauigkeitsbeziehung und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung; NW, vol.22(1934), pp.439-441

LORENZEN, Paul:

- (1) Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände; JSL, vol.16(1951)
- (2) Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis; Mathematische Zeitschrift, vol.54(1951), pp.1-24
- (3) Über endliche Mengen; Mathematische Annalen, vol.123(1951), pp.331-338
- (4) Die ontologische und operative Auffassung der Logik; Actes du XIème congrès international de philosophie, vol.5 (Brüssel 1953), pp.12-18
- (5) Einführung in die operative Logik und Mathematik; Berlin 1955
- (6) Formale Logik; Berlin 1958
- (7) Über die Begriffe "Beweis" und "Definition"; Constr., pp.169-177

LUDWIG, Günther:

- (1) Die Grundlagen der Quantenmechanik; Berlin 1954

ŁUKASIEWICZ, Jan:

- (1) Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls; Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie (1930)
- (2) On the intuitionistic theory of deduction; Indagationes mathematicae (Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen), vol.14(1952), pp.202-212

MITTELSTAEDT, Peter:

- (1) Untersuchungen zur Quantenlogik; München 1959
- (2) Über die Gültigkeit der Logik in der Natur; NW, vol.47 (1960), pp.385-391

MOSSO, Pietro:

siehe PASTORE, Annibale & MOSSO, Pietro (1)

NEUMANN, John von:

- (1) Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik; Berlin 1932
- siehe auch: BIRKHOFF, G. & NEUMANN, J.v. (1)

PASTORE, Annibale & MOSSO, Pietro:

- (1) Il fondamento logico dei principi di complementarità di BOHR e di indeterminazione di HEISENBERG; Atti della Reale Accademia della Scienze di Torino, Classe di scienze morali storiche e filologiche, vol.75(1940), pp.3-11

QUINE, Willard van Orman:

- (1) Mathematical logic; New York 1951
 - (2) From a logical point of view; Cambridge 1953
- siehe auch GOODMAN, N. & QUINE, W.v.O. (1)

REICHENBACH, Hans:

- (1) Philosophic foundations of quantum mechanics; Berkeley 1944, deutsche Übers.: Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik, Basel 1949
- (2) The principles of anomaly in quantum mechanics; D, vol.2 (1948), pp.337 ff.
- (3) Über die erkenntnistheoretische Problemlage und den Gebrauch einer dreiwertigen Logik in der Quantenmechanik; Zeitschrift für Naturforschung, vol.6a(1951)
- (4) Les fondements logiques de la mécanique des quanta; Annales de l'Institut Henri POINCARÉ (1952/53)

ROUGIER, Louis:

- (1) Les nouvelles logiques de la mécanique quantique et l'empirisme radical; The journal of unified science, vol.9(1939)

SPECKER, Ernst:

- (1) Die Logik der nicht gleichzeitig entscheidbaren Aussagen; D, vol.14(1960), pp.239-246

SCHÖLZ, Heinrich & HASENJAEGGER, Gisbert:

- (1) Grundzüge der Mathematischen Logik; Berlin 1961

STAHL, Gerold:

- (1) The sufficiency of two-valued logic for quantum physics; Vervielfältigungsmanuskript des "Primer congreso de la sociedad interamericana de filosofia, Santiago de Chile" (1956), 9 pp.

STEGMÜLLER, Wolfgang:

- (1) Metaphysik, Wissenschaft, Skepsis; Wien 1954
- (2) Das Universalienproblem, einst und jetzt; Arch.Phil., vol.6(1956), pp.192-225, ibid., vol.7(1957), pp.45-81
- (3) Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik; Wien 1957
- (4) Der Phänomenalismus und seine Schwierigkeiten; Arch.Phil., vol.8(1958), pp.36-100

STRAUSS, Martin:

- (1) Mathematics as logical syntax - a method to formalize the language of physical theory; E, vol.7(1938), pp.147-153

WEIZSÄCKER, Carl Friedrich von:

- (1) Komplementarität und Logik; NW, vol.42(1955), pp.521-529, 545-555

WEYL, Hermann:

- (1) Gruppentheorie und Quantenmechanik; Leipzig 1932

WITTGENSTEIN, Ludwig:

- (1) Tractatus logico-philosophicus; London 1922
- (2) Philosophische Untersuchungen; Oxford 1953
- (3) Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik; Oxford 1956

ZAWIRSKI, Zygmunt:

- (1) Über die Anwendung der mehrwertigen Logik in der empirischen Wissenschaft; E, vol.6(1936/37)
- (2) Importance des recherches logiques et sémantiques pour les théories de la physique contemporaine; Travaux du XI^{ème} congrès international de philosophie, VI: logique et mathématique, Paris 1937, pp.82-87

Im Literaturverzeichnis und in den Fußnoten fanden folgende Abkürzungen für Zeitschriften und Sammelbände Verwendung:

Ann.Math.	=	Annals of mathematics
Arch.Phil.	=	Archiv für Philosophie
Ax.Meth.	=	HENKIN, Leon & SUPPES, Patrick & TARSKI, Alfred (eds.): The axiomatic method; Amsterdam 1959
Constr.	=	HEYTING, Arend(ed.): Constructivity in mathematics; Amsterdam 1959
CRAS	=	Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris
D	=	Dialectica
E	=	Erkenntnis
JSL	=	Journal of symbolic logic
Phil.Sc.	=	FEIGL, H. & BRODBECK, M.(eds.): Readings in the philosophy of science; New York 1953
NW	=	Die Naturwissenschaften

LEBENS LAUF

Am 18. März 1937 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Jakob Fuchs und seiner Ehefrau Gretel Fuchs in Princeton, New Jersey (USA) geboren. Die Grundschule besuchte ich vom Herbst 1943 bis Sommer 1947 in Memmingen im Allgäu. An der Memminger Oberrealschule schloß ich am 19. Juli 1956 mit der Hochschulreife ab. Seit Wintersemester 1956/57 studierte ich zunächst an der Technischen Hochschule, dann an der Universität München Logik und Grundlagenforschung (Logistik), Mathematik, Physik und Philosophie. Seit November 1961 verwalte ich die Amtsgeschäfte einer wiss. Assistentenstelle am Philosophischen Seminar II.

Meine akademischen Lehrer waren in der Logik und Grundlagenforschung Prof.Dr. W. Britzelmayr und Prof.Dr.Dr. W. Stegmüller. Philosophische Vorlesungen und Übungen besuchte ich bei den Professoren Stegmüller, Stürmann, Wenzl, Neuhäusler, Krings, Schilling und Varga. Experimentalphysik hörte ich bei den Professoren Gerlach, Rollwagen, Maier-Leibnitz, Joos, Faessler, Schober und Auer, Theoretische Physik bei den Professoren Bopp, Schlüter und Schmeidler. Außerdem besuchte ich mathematische Vorlesungen bei den Professoren Aumann, Maak, Lense und Sommer, philologische Vorlesungen bei den Professoren H. Braun, Rheinfelder, Clemen und Motekat. Juristische Logik und Rechtsphilosophie hörte ich bei Prof. Engisch, Soziologie bei Prof. Francis.

Unter der Leitung von Prof.Dr. W. Britzelmayr entstand meine Dissertation "Logische Untersuchungen zu Modellen der klassischen und quantentheoretischen Mechanik".

